Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 03.05.2013
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1: Linksmultiplikation mit t (3+1 Punkte)
Es sei K ein Körper und $p = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Weiter sei $I = (p)_{K[t]}$ das von p erzeugte Hauptideal von $K[t]$.

a.) $K[t]/I$ ist ein K-Vektorraum mit der Standardbasis aus Aufgabe 4, Blatt 2:
$$B := \big(1 + I,\, t + I,\, t^2 + I, \dots,\, t^{n-1} + I\big).$$
$K[t]/I$ ist auch ein $K[t]$-Modul mit der skalaren Multiplikation:
$$K[t] \times (K[t]/I) \longrightarrow K[t]/I \quad \text{mit} \quad (r, q + I) \mapsto (r \cdot q) + I.$$
Das Polynom $t \in K[t]$ ist bzgl. der $K[t]$-Modulstruktur von $K[t]/I$ ein Skalar, und die Linksmultiplikation l_t mit t eine $K[t]$-lineare Abbildung (siehe Definition 2.15):
$$l_t \colon K[t]/I \longrightarrow K[t]/I \quad \text{mit} \quad q + I \mapsto (t \cdot q) + I.$$
Die $K[t]$-lineare Abbildung l_t ist wegen $K \subseteq K[t]$ auch K-linear und damit ein Element von $\mathrm{End}_K(K[t]/I)$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[l_t]_{B,B}$.

b.) Wenden Sie Teil a) an auf den Fall $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)_{\mathbb{R}[t]}$.

Aufgabe 2: Darstellende Matrix (2+1+1 Punkte)
Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi \colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

a.) Zeigen Sie, daß es einen Untervektorraum U von V gibt mit folgenden Eigenschaften:
$$V = \ker(\varphi) \oplus U \quad \text{und} \quad U \cong \mathrm{im}(\varphi).$$

b.) Zeigen Sie, daß es jeweils eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V und $C = (c_1, \dots, c_m)$ von W gibt, sodaß die darstellende Matrix $[\varphi]_{C,B}$ mit die folgende Gestalt hat:
$$[\varphi]_{C,B} = \left(\begin{array}{cc} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K) \quad \text{und} \quad r \in \mathbb{N}_0.$$
Zeigen Sie, daß in einer solchen Matrizendarstellung von φ die Größe $r \in \mathbb{N}_0$ eindeutig bestimmt ist.

c.) Nach Teil b.) gibt es insbesondere für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ über einem Körper K invertierbare Matrizen $S \in GL_m(K)$ und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit:
$$SAT = \left(\begin{array}{cc} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right).$$
Finden Sie entsprechende Matrizen für:
$$A := \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbb{Q}).$$

Bitte wenden

Aufgabe 3: Freie Moduln und Torsion (1+1+1+1 Punkte)

a.) Es sei der Ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation) als $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Modul betrachtet. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist offensichtlich ein freier $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Modul vom Rang Eins und $(1,1)$ eine Basis. Zeigen Sie: $\mathbb{Z} \times \{0\}$ ist ein $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, der kein freier Modul ist.

b.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R-Modul. Der Torsionanteil $\operatorname{Tor}(M)$ von M ist definiert durch:

$$M_{\text{Tor}} := \{\, x \in M \mid \exists r \in R \setminus \{0\} \text{ mit } rx = 0 \,\}.$$

Bestimmen Sie für den $\mathbb{Z}_6$-Modul $M := \mathbb{Z}_6$ die Menge M_{Tor} und zeigen Sie, daß dies kein Untermodul von M ist.

c.) Sei R ein Integritätsring und $I \neq \{0\}$ ein Ideal in R. Zeigen Sie:

$$I \text{ ist ein freier R-Modul} \quad \Longrightarrow \quad I \text{ ist Hauptideal.}$$

d.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein torsionsfreier R-Modul. Zeigen Sie, daß dann für jedes $a \in R$ mit $a \neq 0$ die Linksmultiplikation:

$$l_a \colon M \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad x \mapsto ax$$

eine injektive Abbildung ist.

Aufgabe 4: Torsionsmodul zu einem Endomorphismus (3+1 Punkte)

Sei $V := \mathbb{R}^{[3]}$ und $\varphi_A \colon V \longrightarrow V$ der Endomorphismus von V, der durch die folgende Matrix A gegeben ist:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

V wird zu einem $\mathbb{R}[t]$-Modul V_{φ_A} durch die folgende skalare Multiplikation:

$$\mathbb{R}[t] \times V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad (p,x) \mapsto \big(p(\varphi_A)\big)(x) = p(A) \cdot x.$$

a.) Finden Sie für das folgende Hauptideal I_A von $K[t]$ ein Element $\mu_A \in \mathbb{R}[t]$ mit $I_A = (\mu_A)_{\mathbb{R}[t]}$:

$$I_A := \{\, p \in \mathbb{R}[t] \mid p(A) = 0 \,\}.$$

Hinweis: Berechnen Sie für jeden Vektor e_1, e_2, e_3 der Standardbasis von $V := \mathbb{R}^{[3]}$ die Vektoren $e_i, Ae_i, A^2e_i, \ldots$ bis eine lineare Abhängigkeit entsteht. Konstruieren Sie aus einer solchen linearen Abhängigkeit Polynome p_{e_i} mit $p_{e_i}(A) \cdot e_i = 0$ für $i = 1,2,3$. Finden Sie μ_A als $\operatorname{kgV}(p_{e_1}, p_{e_2}, p_{e_3})$.

b.) Zeigen Sie, daß V_{φ_A} ein Torsionsmodul ist und $\operatorname{Ann}_{\mathbb{R}[t]}(V_{\varphi_A}) = (\mu_A)_{\mathbb{R}[t]}$.

Abgabe am Montag, 13.05.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.