Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 26.04.2013

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1: Irreduzible Polynome (2+2 Punkte)

a.) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_2[t]$ alle irreduziblen Polynome von Grad ≤ 4.

b.) Zeigen Sie, daß das folgende Polynom irreduzibel ist:

$$f := t^2 + t + [2]_3 \in \mathbb{Z}_3[t].$$

Es sei $I := (f)_{\mathbb{Z}_3[t]}$ das von f erzeugte Ideal von $\mathbb{Z}_3[t]$. Da f irreduzibel ist, ist der Quotientenring ein Körper:

$$K := \mathbb{Z}_3[t]/I.$$

Zeigen Sie, daß die multiplikative Gruppe K^* dieses Körpers zyklisch ist, indem Sie ein erzeugendes Element bestimmen.

Aufgabe 2: Chinesischer Restsatz (1+1+2 Punkte)

a.) Klassische Version: Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen x mit

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \mod 5, \\ x &\equiv 5 \mod 8, \\ x &\equiv 3 \mod 7. \end{aligned}$$

b.) Ringtheoretische Version: Bestimmen Sie für den folgenden Ringhomomorphismus ein Urbild von $([7]_5,\ [2]_7,\ [5]_6)$:

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_{210} \longrightarrow \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_6 \quad \text{mit} \quad [a]_{210} \mapsto ([a]_5,\ [a]_7,\ [a]_6).$$

c.) Pizzaversion (aus einem Algebrabuch):
Leo isst alle 5 Tage, Robert alle 7 Tage und Philipp alle 11 Tage Pizza. Leo und Philipp aßen ihre erste Pizza in diesem Jahr am 15.März, Robert am 16.März. Wann können (oder konnten) sie erstmals gemeinsam Pizza essen?

Bitte wenden

Aufgabe 3: Restklassenringe (3+1 Punkte)

a.) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Ringe $\mathbb{Z}_{mn}$ und $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ genau dann isomorph sind, wenn m und n teilerfremd sind.

b.) Gilt die gleiche Äquivalenzaussage auch für die abelschen Gruppen $\mathbb{Z}_{mn}$ und $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$?

Aufgabe 4: Bestimmung von Kernen (1+1+1+1 Punkte)

Im folgenden werden vier Ringhomomorphismen von einem Hauptidealring in den Endomorphismenring einer abelschen Gruppe gegeben. Bestimmen Sie jeweils die Kerne (Hauptideale) dieser Ringhomomorphismen.

a.) (Vgl. Aufgabe 4, Blatt 8, LA I):

$$\psi_1 \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{Z}_9) \quad \text{mit} \quad n \mapsto (\rho_n \colon [a]_9 \mapsto [na]_9).$$

b.) (Vgl. Aufgabe 4, Blatt 8, LA I):

$$\psi_2 \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \quad \text{mit} \quad n \mapsto (\rho_n \colon ([a]_3, [b]_3) \mapsto ([na]_3, [nb]_3).$$

c.)

$$\psi_3 \colon \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^{[2]}) \quad \text{mit} \quad f \mapsto f(\varphi_A), \quad \text{wobei} \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Betrachten Sie χ_A.

d.)

$$\psi_4 \colon \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^{[2]}) \quad \text{mit} \quad f \mapsto f(\varphi_B), \quad \text{wobei} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abgabe am Montag, 06.05.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.