Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 19.04.2013
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1: Ein nicht-faktorieller Ring (1+1+1+1 Punkte)

Die folgende Menge ist ein Unterring der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Auf $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sei folgende Norm-Funktion definiert:

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \longrightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad a + b\sqrt{-5} \mapsto a^2 + 5b^2.$$

Zeigen Sie:

a.) $N(zw) = N(z)N(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

b.)
$$z \in \left(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\right)^* \iff N(z) = 1 \qquad \text{und} \qquad \left(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\right)^* = \{-1, 1\}.$$

c.) 2, 3 und $1 \pm \sqrt{-5}$ sind irreduzible Elemente von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, aber nicht prim.
Hinweis:
$$2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}).$$

d.) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist kein faktorieller Ring.

Aufgabe 2: Ein faktorieller Ring, der kein Hauptidealring ist (2+2 Punkte)

a.) Zeigen Sie, daß im Polynomring $\mathbb{Z}[t]$ das folgende Ideal kein Hauptideal ist:
$$I := \{f \in \mathbb{Z}[t] \mid f(0) \text{ ist gerade}\}.$$

b.) $\mathbb{Z}[t]$ ist demnach kein Hauptidealring, er ist aber dennoch faktoriell. Geben Sie die Primfaktorzerlegung von $t^6 - 1$ in $\mathbb{Z}[t]$ an.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Euklidischer Algorithmus (1+1+1+1 Punkte)
Bestimmen Sie mit dem euklidischen Algorithmus jeweils den ggT der angegebenen Elemente, und stellen Sie ihn mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus als ganzzahlige Linearkombination derselben dar:

a.) $531,\ 93 \in \mathbb{Z}$.
b.) $247,\ 221 \in \mathbb{Z}$.
c.) $t^3 - 3t + 2,\ t^3 + 4t^2 + 5t + 2 \in \mathbb{Q}[t]$.
d.) $t^6 + 1,\ t^5 + 2t^3 + t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}_5[t]$.

Aufgabe 4: Quotientenvektorraum (2+2 Punkte)
Sei K ein Körper und $p \in K[t]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Weiter sei $I = (p)_{K[t]}$ das von p erzeugte Hauptideal von $K[t]$.

a.) Zeigen Sie:

$$K[t]/I = \{\, q + I \mid q \in K[t], \mathrm{grad}(q) < \mathrm{grad}(p) \,\}.$$

b.) Zeigen Sie, daß das folgende System eine Basis des K-Vektorraums $K[t]/I$ ist:

$$\big(1 + I,\ t + I,\ t^2 + I, \ldots,\ t^{n-1} + I\big).$$

Abgabe am Montag, 29.04.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.