Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 15.04.2013

# Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
# Aufgabenblatt 1

**Aufgabe 1:** Darstellende Matrizen (2+1+1 Punkte)
Gegeben sei der folgende Endomorphismus von $\mathbb{R}^{[3]}$:

$$\psi\colon \mathbb{R}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+3z \\ -5x+6y+4z \\ -4x+y+8z \end{pmatrix}.$$

Weiter sei die folgende Basis von $\mathbb{R}^{[3]}$ gegeben:

$$B := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

a.) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen $[\psi]_{B,B}$ und $[\psi - 5 \cdot \mathrm{id}]_{B,B}$.
b.) Bestimmen Sie den Eigenraum $\mathrm{Eig}(\psi, 5)$.
c.) Geben Sie einen zweidimensionalen $\psi$-invarianten Untervektorraum $W$ von $\mathbb{R}^{[3]}$ an, d.h. einen Untervektorraum $W$ von $\mathbb{R}^{[3]}$, für den gilt: $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$ und $\psi(W) \subseteq W$.

**Aufgabe 2:** Nilpotente Endomorphismen (1+2+1 Punkte)
Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ein Endomorphismus mit $\varphi \neq 0$ und $\varphi^2 = 0$. Zeigen Sie:
a.) Für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\varphi(x) \in \ker(\varphi)$.
b.) Es gibt eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^3$, so daß gilt:

$$[\varphi]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c.) $\varphi$ ist nicht diagonalisierbar.

**Bitte wenden**

**Aufgabe 3:** Konjugierte Matrizen (4 Punkte)

Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins und seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a.) $A$ und $B$ sind konjuguiert.
b.) $A^k$ und $B^k$ sind konjugiert für alle $k \in \mathbb{N}$.
c.) $P(A)$ und $P(B)$ sind konjugiert für jedes Polynom $P \in R[t]$.
d.) $A - \lambda \cdot E_n$ und $B - \lambda \cdot E_n$ sind konjugiert für jedes $\lambda \in R$.

**Aufgabe 4:** Äquivalente Definition eines $R$-Moduls (2+2 Punkte)

In dieser Aufgabe soll die Äquivalenz der Definitonen 2.1.2 und 2.1.7 eines $R$-Moduls aus dem Skript LA I bewiesen werden.

a.) Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins und sei $M$ ein $R$-Modul mit der skalaren Multiplikation

$$\bullet\colon R \times M \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad (a, x) \mapsto ax.$$

Für $a \in R$ sei die Linksmultiplikation $l_a$ mit $a$ in $M$ wie folgt definiert:

$$l_a\colon M \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad x \mapsto ax.$$

Betrachten Sie die folgende dadurch induzierte Abbildung:

$$\Psi\colon R \longrightarrow \mathrm{End}_R(M) \quad \text{mit} \quad a \mapsto l_a.$$

Zeigen Sie: $\Psi$ ist ein Ringhomomorphismus mit $\Psi(1_R) = \mathrm{id}_M$.

b.) Umgekehrt sei $\Psi\colon R \longrightarrow \mathrm{End}_R(M)$ ein Ringhomomorphismus mit $\Psi(1_R) = \mathrm{id}_M$. Definieren Sie nun die folgende skalare Multiplikation:

$$\bullet\colon R \times M \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad (a, x) \mapsto \Psi(a)(x).$$

Zeigen Sie, daß $M$ durch diese skalare Multiplikation zu einem $R$-Modul wird, indem Sie die Eigenschaften V1 bis V4 aus Definition 2.1.2 in LA I nachrechnen.

**Abgabe am Montag, 22.04.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.**