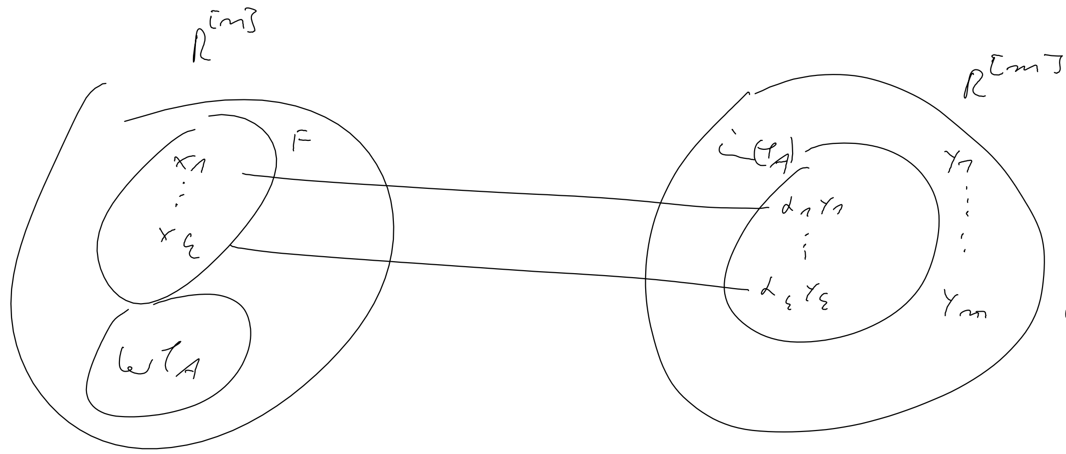
Existenz ET Mod $\Rightarrow$ Existenz ET Mat

$A \in Mat(m \times n, R)$, gesucht:
$S \in GL_m(R)$, $T \in GL_n(R)$ mit $SAT = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_k \end{pmatrix}$, $a_i | a_{i+1}$

$A \rightsquigarrow \varphi_A : R^{[n]} \to R^{[m]}$, $\mathrm{im}(\varphi_A) \subseteq R^{[m]}$ UM
$\overset{\text{ETS Mod}}{\rightsquigarrow}$ $\exists\, y_1, \dots, y_m$ ETS-Basis von M bzgl. $\mathrm{im}(\varphi_A)$
mit $\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_k y_k$ Basis von $\mathrm{im}(\varphi_A)$ und $\alpha_i | \alpha_{i+1}$



$\leftarrow$ Existenz ETS Mod

mit $R^{[n]} = F \oplus \ker(\varphi_A)$

$x_1, \dots, x_k$ Basis Konstr. Lem 5.2.16

$v_1 \dots v_r$ Basis: $\ker(\varphi_A)$ frei nach Satz 5.2.13

$x_1 \dots x_k\, v_1 \dots v_r$ Basis R^n
Lem 5.2.6

$$\Rightarrow \quad [\varphi_A]_{Y,X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_i | \alpha_{i+1}$$

Es gilt: $$[\varphi_A]_{Y,X} = \underset{=S}{[id]_{Y,E_m}} \underbrace{[\varphi_A]_{E_m,E_n}}_{=A} \underset{=T}{[id]_{E_n,X}}$$

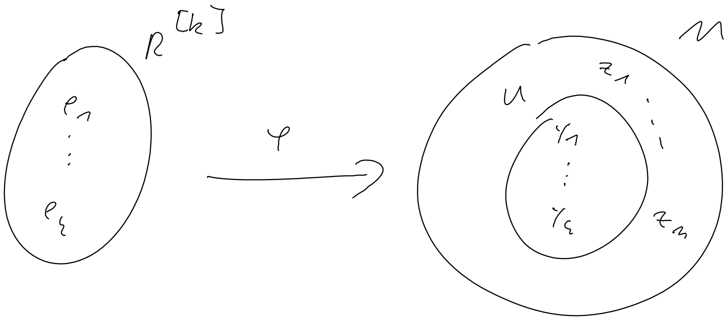
$$\Rightarrow \quad SAT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_i | \alpha_{i+1} \quad .$$

Existenz ET Mat $\Rightarrow$ Existenz ET Mod

gegeben: $U \subseteq M$ frei
gesucht: ET-Basis von M bzgl. U

gegeben: $y_1, \dots, y_k$ Basis von U, $z_1, \dots, z_n$ Basis von M

$\rightsquigarrow \quad \varphi : R^{[k]} \longrightarrow M, \quad e_i \longmapsto y_i \quad \Rightarrow \quad \operatorname{im}(\varphi) = U.$



$A := [\varphi]_{Z, \mathcal{E}_k} \overset{\text{Existenz ET Mat}}{\rightsquigarrow} SAT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \mid \alpha_{i+1}$

$S \in GL_n(R)$, Z gegeben $\Rightarrow$ $\exists$ Basis $B := (b_1, \dots, b_n)$ von M mit $S = [id]_{B, Z}$.

$T \in GL_k(R)$, $\mathcal{E}_k$ gegeben $\Rightarrow$ $\exists$ Basis $C := (c_1, \dots, c_k)$ von $R^{[k]}$ mit $T = [id]_{\mathcal{E}_k, C}$

$$\Rightarrow SAT = [id]_{B,Z} [\varphi]_{Z, \mathcal{E}_k} [id]_{\mathcal{E}_k, C} = [\varphi]_{B, C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{im} \varphi = \langle \underbrace{\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_k)}_{\text{Basis}} \rangle$ und $\varphi(c_i) = \alpha_i b_i$

wegen i-te Spalte gleich $[\varphi(c_i)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

$\Rightarrow$ B ET-Basis von M bzgl. U

Eindeutigkeit ET Mod $\Rightarrow$ Eindeutigkeit ET Mat:

gegeben: $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, R)$ und

$$SAT = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \alpha_i | \alpha_{i+1} \qquad \tilde{S}A\tilde{T} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \beta_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \beta_i | \beta_{i+1}$$

z.z. $k = r$ und $\alpha_i \sim \beta_i$

Betrachte $\varphi_A : R^{[n]} \longrightarrow R^{[m]}$, $A = [\varphi_A]_{\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n}$

S gegeben, $\mathcal{E}_m$ gegeben $\Rightarrow \exists$ Basis $\mathcal{B}$ des $R^{[m]}$ mit $[id]_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_m} = S$
$\tilde{S}$ gegeben, $\mathcal{E}_m$ gegeben $\Rightarrow \exists$ Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ des $R^{[m]}$ mit $[id]_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{E}_m} = \tilde{S}$
T gegeben, $\mathcal{E}_n$ gegeben $\Rightarrow \exists$ Basis $\mathcal{C}$ des $R^{[n]}$ mit $[id]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{C}} = T$
$\tilde{T}$ gegeben, $\mathcal{E}_n$ gegeben $\Rightarrow \exists$ Basis $\tilde{\mathcal{C}}$ des $R^{[n]}$ mit $[id]_{\mathcal{E}_n, \tilde{\mathcal{C}}} = \tilde{T}$

$$\Rightarrow \quad SAT = [id]_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_m} [\varphi_A]_{\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n} [id]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{C}} = [\varphi_A]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$$
$$\tilde{S}A\tilde{T} = [id]_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{E}_m} [\varphi_A]_{\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_n} [id]_{\mathcal{E}_n, \tilde{\mathcal{C}}} = [\varphi_A]_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}}$$

$$\Rightarrow \quad [\varphi_A]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad [\varphi_A]_{\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \beta_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{im}(\varphi_A) = \langle \underbrace{\varphi_A(c_1), \ldots, \varphi_A(c_k)}_{\text{Basis}} \rangle = \langle \underbrace{\varphi_A(\tilde{c}_1), \ldots, \varphi_A(\tilde{c}_r)}_{\text{Basis}} \rangle$$
$$\Rightarrow k = r.$$

Weiter folgt aus der

$\mathcal{B}$ ET-Basis von $R^{[m]}$ bzgl. $\mathrm{im}(\varphi_A)$ mit ET $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$
$\tilde{\mathcal{B}}$ ET-Basis von $R^{[m]}$ bzgl. $\mathrm{im}(\varphi_A)$ mit ET $\beta_1, \ldots, \beta_k$ $(r = k)$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i \sim \beta_i$$

Eindeutigkeit ET Mat ⇒ Eindeutigkeit ET Mod:

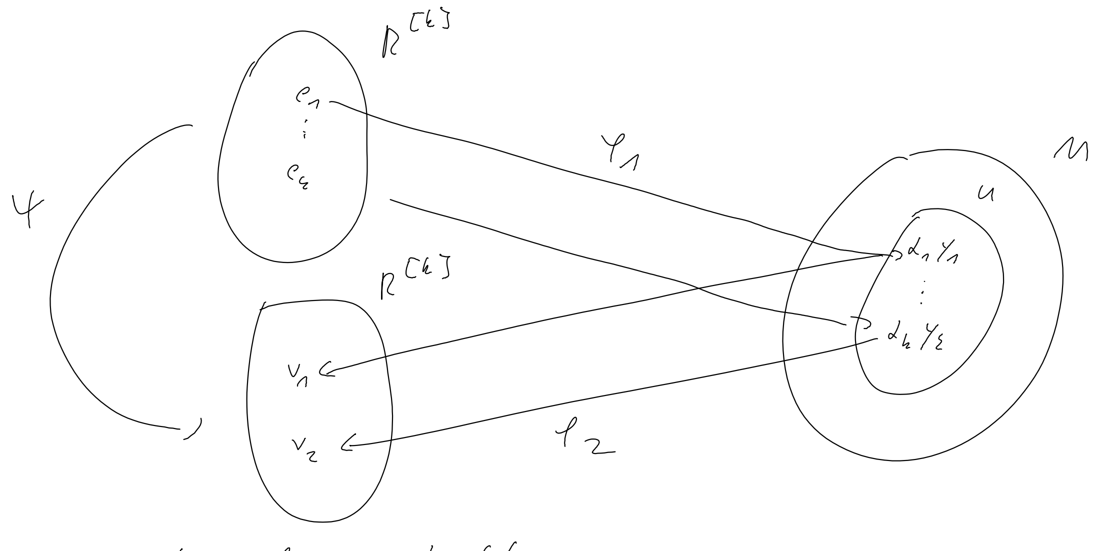
gegeben: $U \subseteq M$, ET-Basen
$Y: y_1, \ldots, y_m$ und $Z: z_1, \ldots, z_n$ von M bzgl. U mit ET
$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ und $\beta_1, \ldots, \beta_r$
zu zeigen: $k = r$ und $\alpha_i \sim \beta_i$

$$U = \langle \underbrace{\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_k y_k}_{\text{Basis}} \rangle = \langle \underbrace{\beta_1 z_1, \ldots, \beta_r z_r}_{\text{Basis}} \rangle \Rightarrow r = k$$

Y und Z induziere Abbildungen:
$\varphi_1 : R^{[k]} \longrightarrow M \qquad e_i \longmapsto \alpha_i y_i$
$\varphi_2 : R^{[k]} \longrightarrow M \qquad e_i \longmapsto \beta_i z_i$

$$\Rightarrow [\varphi_1]_{Y, \mathcal{E}_k} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad [\varphi_2]_{Z, \mathcal{E}_k} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \beta_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\varphi_2 : R^{[k]} \longrightarrow U \subseteq M$ ist Iso, da die Basis $\mathcal{E}_k$ auf die Basis $\beta_1 z_1, \ldots, \beta_k z_k$ abgebildet wird, und so gibt es für die Basis $\alpha_1 y_1, \ldots, \alpha_k y_k$ von U eindeutige Urbilder $v_1, \ldots, v_k$, die dann eine Basis des $R^{[k]}$ sind.
$\longrightarrow \psi : R^{[k]} \longrightarrow R^{[k]}$ mit $e_i \longmapsto v_i$ ist Iso



Es gilt nach Konstruktion: $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$

$\leadsto \quad [\varphi_1]_{Y,\mathcal{E}_k} = [\varphi_2 \circ \psi]_{Y,\mathcal{E}_k} = [id]_{Y,Z}\, [\varphi_2]_{Z,\mathcal{E}_k}\, [\psi]_{\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_k}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_k \end{pmatrix} = [\varphi_1]_{Z,\mathcal{E}_k} = \underbrace{[id]_{Y,Z}}_{=:S} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_k \end{pmatrix} \underbrace{[\psi]_{\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_k}}_{=:T}$$

$\overset{\text{Eind. ET. Mat}}{\Rightarrow} \quad \alpha_i = \beta_i$, da zwei Smith-NF äquivalent