Blatt 7

Aufg. 1 a)

$$\det(A) = 1000 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 1000 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 1000 \cdot (-1) \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1000 \cdot (-1) \det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = -2000$$

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -8$$

Aufg. 1 b)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & -3 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{21}{2} & -\frac{17}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = LR \Rightarrow \det(C) = \det(L)\det(R) = 7$$

$$C^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 33 & -48 & 17 \\ 13 & -17 & 5 \\ -14 & 21 & -7 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad R := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = LR \Rightarrow \det(D) = -4$$

$$D^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufg. 2a)

$\mathcal{B} := (1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3)$

$\mathcal{C} := (1, t, t^2, t^3)$

$$\Rightarrow [\Psi]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [id]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \left([id]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\Psi]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} [\Psi]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\Psi) = \det\left([\Psi]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 0 & -12 & -12 \\ 0 & -4 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -12 & -12 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= (-12)\cdot 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -144$$

Aufg. 2b) Wähle als Basis von V:

$$\tilde{B} := \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 12 \\ 1 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [\varphi]_{\tilde{B}, \tilde{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(\varphi) = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= 12 \cdot 6 \cdot 8 = 576$$

Aufg. 3a)

$$[f]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{\mathcal{E}_2,B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{C,B} = [f]_{B,B} = [id]_{B,\mathcal{E}_2}\,[f]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_2}\,[id]_{\mathcal{E}_2,B}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -7 & -9 \end{pmatrix}$$

Aufg. 3b)

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufg. 3c)

$$[f]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{\mathcal{E}_2, C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [id]_{C,\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{C,\mathcal{E}_4} = [id]_{C,\mathcal{E}_2}\,[f]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_4}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Aufg. 3d)

$$f(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{E}_3, B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{C,B} = [id]_{C,\mathcal{E}_3}\,[f]_{\mathcal{E}_3,B}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 \\ -1 & -13 & 11 \\ 1 & 18 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 65 \\ -90 \end{pmatrix}$$

<u>Aufg. 4 a)</u> A, B, C haben jeweils die Eigenwerte 2 und 3

A: $\mathrm{Eig}(A,3) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\mathrm{Eig}(A,2) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Eig}(A,3) + \dim \mathrm{Eig}(A,2) < 3$

$\Rightarrow A$ nicht diagonalisierbar

B: $\mathrm{Eig}(B,3) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\mathrm{Eig}(B,2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$\dim \mathrm{Eig}(B,2) + \dim \mathrm{Eig}(B,3) = 3$

$\Rightarrow B$ diagonalisierbar

C: $\mathrm{Eig}(C,3) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\mathrm{Eig}(C,2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$\Rightarrow C$ diagonalisierbar

Bei D sieht man die Eigenwerte nicht sofort.

$\chi_D = (t-2)(t-1)(t-4)$

$\mathrm{Eig}(D,2) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, $\mathrm{Eig}(D,4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$\mathrm{Eig}(D,1) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$

$\Rightarrow D$ diagonalisierbar.

(Das folgt auch ohne Berechnung der Eigenräume daraus, dass D 3 verschiedene Eigenwerte hat.)

Aufg. 4 b) $\chi_A = t^3 - 7t^2 = t^2(t-7)$

$\mathrm{Eig}(A,0) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$

denn $A \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\mathrm{Eig}(A,7) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$

denn $A - 7 \cdot E_3 = \begin{pmatrix}-5 & 1 & 1\\4 & -5 & 2\\6 & 3 & -4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-5 & 1 & 1\\0 & -21 & 14\\0 & 21 & -14\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}-5 & 1 & 1\\0 & -3 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\0 & 1 & -\frac{2}{3}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\0 & 1 & -\frac{2}{3}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösung $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$C := \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-2 & 0 & 2\\0 & -2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}AC = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 7\end{pmatrix}$

$\chi_B = (t-4)^2(t+1)$

$\mathrm{Eig}(B,4) = \left\langle \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathrm{Eig}(B,-1) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow$ B nicht diagonalisierbar

(Nach 3.4.57 iii) genügt die Erkenntnis

$\mathrm{rg}(B - (-1)E_3) = 2$, $\mathrm{rg}(B - 4E_3) = 2$

dafür, dass B nicht diagonalisierbar ist.)

Aufg. 5a) $\varphi: V \to V$ Endom., $\varphi \circ \varphi = \varphi$

Beh: φ diagonalisierbar

Bew: φ kann höchstens die Eigenwerte 0 und 1 haben, denn aus $\varphi(x) = \lambda x$ mit $x \neq 0$ folgt

$$\lambda x = \varphi(x) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) = \lambda^2 x$$

$\Rightarrow \lambda = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = 0$ oder $\lambda = 1$

1. Fall: $\varphi = 0$ oder $\varphi = id_V \Rightarrow \varphi$ diagonal.

2. Fall: $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq id_V$

Dann ist φ nicht bijektiv, da sonst aus $\varphi \circ \varphi = \varphi$ folgt $\varphi = id_V$

Folglich gilt $\ker(\varphi) \neq \{0\}$ und φ hat 0 als Eigenwert mit $Eig(\varphi, 0) = \ker(\varphi)$

Da $\varphi \neq 0$ ist gilt $im(\varphi) \neq \{0\}$

Für $y \in im(\varphi)$ gilt: $\exists x \in V: y = \varphi(x)$

$\Rightarrow \varphi(y) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(x) = y$

$\Rightarrow \varphi$ hat den Eigenwert 1 und $Eig(\varphi, 1) = im(\varphi)$

$\Rightarrow$ 0 und 1 sind die Eigenwerte von φ und es gilt

$$\dim(V) = \dim \ker(\varphi) + \dim im(\varphi)$$
$$= \dim Eig(\varphi, 0) + \dim Eig(\varphi, 1)$$

Nach 7.4.56 ist φ diagonalisierbar

Aufg. 5 b) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \chi_A = t^2 - (a+d)t + (ad - bc)$$

$$= (t-\lambda)^2 = t^2 - 2\lambda t + \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a+d}{2}, \quad \lambda^2 = ad - bc \qquad (*)$$

$$(A - \lambda E_2)^2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} (a-\lambda)^2 + bc & (a-\lambda)b + (d-\lambda)b \\ c(a-\lambda) + (d-\lambda)c & (d-\lambda)^2 + bc \end{pmatrix}$$

Nach $(*)$ gilt $c(a-\lambda) + (d-\lambda)c = c(a+d-2\lambda) = 0$

und $(a-\lambda)b + (d-\lambda)b = b(a+d-2\lambda) = 0$

sowie

$$(a-\lambda)^2 + bc = a^2 - 2\lambda a + \lambda^2 + bc$$

$$= a^2 - 2\frac{a+d}{2}a + \lambda^2 + bc$$

$$= a^2 - a^2 - ad + ad - bc + bc$$

$$= 0$$

und analog

$$(d-\lambda)^2 + bc = d^2 - 2\lambda d + \lambda^2 + bc$$

$$= d^2 - 2\frac{a+d}{2}d + ad - bc + bc = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda E_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufg. 6 Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_A = t^3 - 3t^2 = t^2(t-3)$$

$$\mathrm{Eig}(A,0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A,3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3)$ Basis des $\mathbb{R}^{[3]}$ aus Eigenvektoren von A

Gram-Schmidt:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ da } \langle w_1, v_3 \rangle = \langle w_2, v_3 \rangle = 0$$

$$\tilde{w}_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}_3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$A w_1 = A w_2 = 0$$
$$A w_3 = 3 w_3$$

$\Rightarrow (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ ist eine ONB von $\mathbb{R}^{[3]}$ aus Eigenvektoren von A

Aufg. 6 Matrix $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

$$\chi_B = t^3 - 9t^2 - 81t + 729 = (t-9)^2(t+9)$$

Eig$(B,9)$: $B - 9E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -16 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Eig}(B,9) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2} \rangle$$

Eig$(B,-9)$

$B + 9E_3 = \begin{pmatrix} 17 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 17 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Eig}(B,-9) = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_3} \rangle$$

Gram-Schmidt:

$w_1 = v_1$,

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} \\ -\frac{4}{17} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\langle w_1, v_3 \rangle = \langle w_2, v_3 \rangle = 0$

$\Rightarrow \quad w_3 = v_3$

$Bw_1 = 9w_1, \quad Bw_2 = 9w_2, \quad Bw_3 = -9w_3$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{17 \cdot 18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -17 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

ist eine ONB von $\mathbb{R}^{[3]}$ aus Eigenvektoren von B

Aufg. 7a)

Es ist leicht (aber schreibaufwendig) nachzurechnen, dass β eine symmetrische Bilinearform ist. Wir zeigen, dass β positiv definit ist: Für $x = (x_1, x_2) \neq (0,0)$ gilt

$$\beta(x,x) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$$
$$= 4\left(x_1^2 + x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2\right)$$
$$= 4\left(\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right) > 0$$

Gram-Schmidt anwenden auf $((1,0),(0,1))$:

$$w_1 = (1,0)$$
$$w_2 = (0,1) - \frac{\beta((1,0),(0,1))}{\beta((1,0),(1,0))}(1,0)$$
$$= (0,1) - \frac{2}{4}(1,0) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$\rightsquigarrow (-1,2)$$

Teste nochmal

$$\beta((1,0),(-1,2)) = 0$$

und normiere

$$\beta((1,0),(1,0)) = 4$$
$$\beta((-1,2),(-1,2)) = 8$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}(1,0), \frac{1}{\sqrt{8}}(-1,2)\right) \text{ ist ONB von } (\mathbb{R}^2, \beta)$$

Aufgabe 7 b)

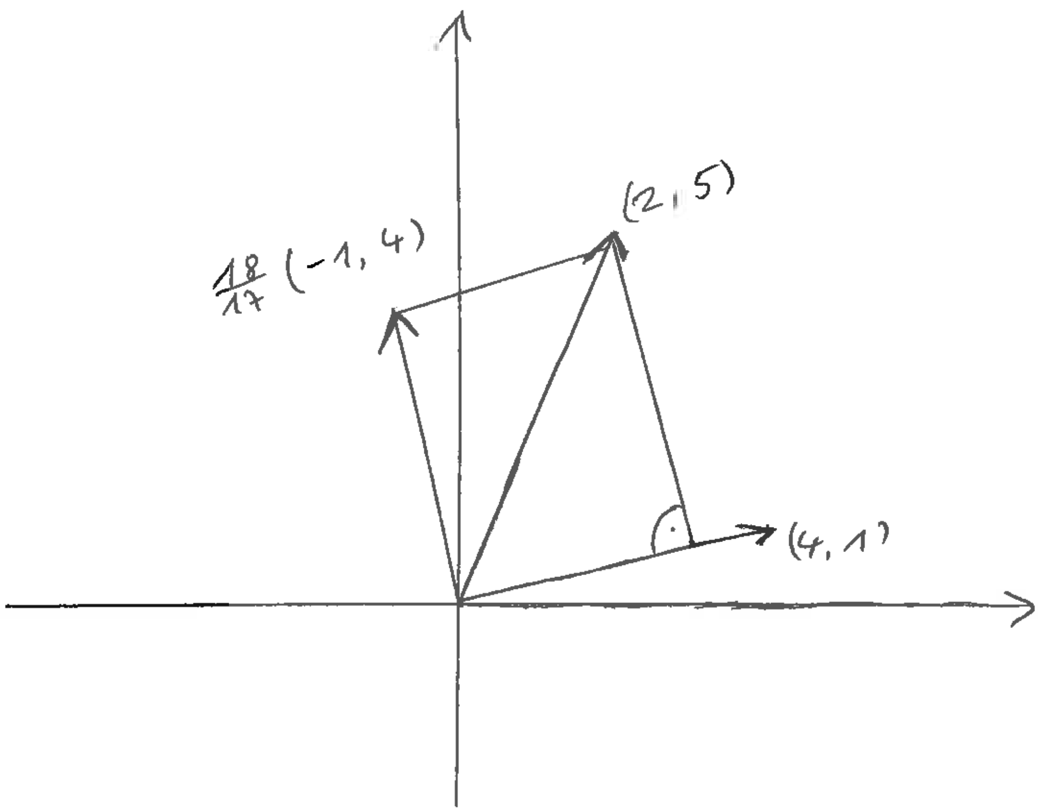
$w_1 = (4,1)$

$$w_2 = (2,5) - \frac{\langle (4,1),(2,5) \rangle}{\langle (4,1),(4,1) \rangle}(4,1)$$

$$= (2,5) - \frac{13}{17}(4,1)$$

$$= \left(-\frac{18}{17}, \frac{72}{17}\right) = \frac{18}{17}(-1,4)$$

Skizze:



<u>Aufg. 8a)</u> Gram-Schmidt auf die Spalten v_1, v_2, v_3 von A anwenden:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\langle w_2, w_2 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$\langle w_2, v_3 \rangle = \frac{4}{3}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle w_1, v_3 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, v_3 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad S := \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \sigma S$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2}{3}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{R}$$

Aufg. 8b) Es ist klar, dass β eine symmetrische Bilinearform ist (Integral ist linear). Zu zeigen ist dann noch, dass β positiv definit ist. Dazu betrachte

$$\beta(f,f) = \int_0^1 \underbrace{f(x)^2}_{\geq 0}\,dx = 0$$ kann nur gelten, wenn $f=0$ (f stetig)

Wende nun auf die Basis $(1, t, t^2, t^3)$ das Gram-Schmidt-Verfahren an:

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = t - \frac{\beta(w_1,t)}{\beta(w_1,w_1)} w_1 = t - \frac{1}{2}$$

$$w_3 = t^2 - \frac{\beta(w_1,t^2)}{\beta(w_1,w_1)} w_1 - \frac{\beta(w_2,t^2)}{\beta(w_2,w_2)} w_2$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} w_2 = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$$\beta(w_3,w_3) = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180}$$

$$w_4 = t^3 - \frac{\beta(w_1,t^3)}{\beta(w_1,w_1)} w_1 - \frac{\beta(w_2,t^3)}{\beta(w_2,w_2)} w_2 - \frac{\beta(w_3,t^3)}{\beta(w_3,w_3)} w_3$$

$$= t^3 - \frac{1}{4} - \frac{\frac{3}{40}}{\frac{1}{12}}\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{180}}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$$

$$= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}$$

$$\beta(w_4,w_4) = \int_0^1 \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\right)^2 dt = \frac{1}{2800}$$

ONB (Normierung!)

$$\left(1, \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right), \sqrt{180}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right), \sqrt{2800}\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\right)\right)$$