Aufgabe 1 a)

$$[\varphi]_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{C,\mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{\mathcal{E}_3,B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [\varphi]_{C,B} = [id]_{C,\mathcal{E}_4}\,[\varphi]_{\mathcal{E}_4,\mathcal{E}_3}\,[id]_{\mathcal{E}_3,B}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 6 & -1 & 8 \\ -6 & 0 & -9 \\ 7 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

1b) 1. Wir drücken $p_{i,n}(t)$ durch die Basis $(1, t, t^2, \dots, t^n)$ von $\mathbb{R}[t]_n$ aus: $p_{i,n}(t) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, t^j$

Dann ist $A = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix (wegen der Faktors t^i) und auf der Diagonalen stehen die $\binom{n}{i}$ (da $(1-t)^{n-i}$ das konstante Glied 1 hat)

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \binom{n}{1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Es folgt $\det(A) \neq 0$ und damit sind $(p_{0,n}, \dots, p_{n,n})$ linear unabhängig und wegen $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[t]_n) = n+1$ bilden sie eine Basis von $\mathbb{R}[t]_n$

2. $p_{0,3}(t) = (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$

$p_{1,3}(t) = 3 \cdot (1-t)^2 t = 3t - 6t^2 + 3t^3$

$p_{2,3}(t) = 3 \cdot (1-t) t^2 = 3t^2 - 3t^3$

$p_{3,3}(t) = t^3$

Sei $B = (1, t, t^2, t^3)$

$C = (p_{0,3}, \dots, p_{3,3})$

$$\Rightarrow [id]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $[1+t+t^2+t^3]_C = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix}$

Es gilt:
$[1+t+t^2+t^3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow [id]_{B,C} \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_0 = 1, \ y_1 = \frac{4}{3}, \ y_2 = 2, \ y_3 = 4$

$\Rightarrow 1 + t + t^2 + t^3 = p_{0,3} + \frac{4}{3} p_{1,3} + 2 p_{2,3} + 4 \cdot p_{3,3}$

Aufgabe 2 a) Konjugierte Matrizen haben die gleiche Determinante, somit können höchstens A zu D und B zu C konjugiert sein.

B und C sind nicht konjugiert wegen $SCS^{-1} = C$ für alle $S \in GL_2(\mathbb{R})$ (da $C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

A und D sind konjugiert, es gilt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S^{-1}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Es ex. ein $b_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $Ab_2 \neq 0$, da $A \neq 0$

$b_1 := Ab_2 \implies B = (b_1, b_2)$ Basis von $\mathbb{R}^2$

denn falls $\alpha b_1 + \beta b_2 = 0$ so folgt wegen $A^2 = 0$ (also $Ab_1 = 0$) sofort

$$\beta A b_2 = 0 \implies \beta b_1 = 0 \implies \beta = 0$$
$$\implies \alpha b_1 = 0 \implies \alpha = 0$$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; f(x) := Ax$

$\implies [f]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

denn $f(b_1) = A^2 b_2 = 0$, $f(b_2) = b_1$

Da $[f]_{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2} = A$ sind A und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ konjugiert (3.4.38)

c) $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$

sind konjugiert

$\iff \exists\, S \in GL_2(\mathbb{Z})$ mit

$$S \cdot \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S \quad (*)$$

Sei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow ad - bc = \pm 1$

$$(*) \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & an \\ 0 & cn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc & md \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff mc = nc = 0, \quad an = md$$

$c \neq 0 \Rightarrow m = n = 0$

$c = 0 \Rightarrow ad = \pm 1 \Rightarrow |a| = |d| = 1$

$\Rightarrow |n| = |m|$

und in der Tat

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 3 a) $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \chi_A = (t-3)^3$

$A - 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 1

$\Rightarrow$ Der Eigenraum von A zum einzigen Eigenwert 3 hat die Dimension 2

$\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar

b) $\chi_A = t^3 - 3t^2 + 4 = (t-2)^2(t+1)$

Eigenwerte von A sind -1, 2

Eigenraum zu -1:

$A + E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ Basis des Lösungsraums

Eigenraum zu 2:

$$A - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Basis des Lösungsraums

$B = \left(\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A

Basiswechsel

$$\Gamma := [id]_{\mathcal{E}_3, B} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{-1} A \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $$[\varphi]_{\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: A$$

$\chi_\varphi = (t-2)^4 \Rightarrow 2$ einziger Eigenwert

Eigenraum: $A - 2 \cdot E_4 = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Rang } 1}$

$\Rightarrow$ Der Eigenraum ist dreidimensional mit der Basis $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \varphi$ nicht diagonal.

3 d) $[\varphi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =: A$

$\chi_\varphi = t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = (t-1)^2(t-4)$

Eigenwerte $1, 4$

Eigenräume:

zu 1: $A - E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Basis V_1: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

zu 4:

$A - 4 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Basis V_4: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Bem</u> φ ist diagonalisierbar da

$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_4$ bzw.

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(V_1) + \dim(V_4)$

Basiswechsel: $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 a) A äquivalent zu A, denn $E_m A E_n = A$ $\Rightarrow$ reflexiv

A äquivalent zu B, $B = SAT$, $S \in GL_m(K)$, $T \in GL_n(K)$ $\Rightarrow$ $A = S^{-1} B T^{-1}$

$\Rightarrow$ B äquivalent zu A $\Rightarrow$ symmetrisch

A äquiv. B, B äquiv. C, $B = SAT$, $C = \tilde{S} B \tilde{T}$

$\Rightarrow$ $C = (\tilde{S} S) A (T \tilde{T})$ $\Rightarrow$ A äquiv. C

$\Rightarrow$ transitiv

b) Es gilt $\dim K^{(n)} = \dim(\operatorname{im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi))$
$=: k + (n-k)$

Sei $(b_{k+1}, \dots, b_n)$ eine Basis von $\ker(\varphi)$, die wir zu einer Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von $K^{(n)}$ ergänzen.

Dann ist $(f(b_1), \dots, f(b_k))$ eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$, die wir zu einer Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$ von $K^{(m)}$ ergänzen

(also $c_i = f(b_i)$, $i = 1, \dots, k$)

Dann folgt $f(b_i) = c_i$, $i = 1, \dots, k$ und $f(b_i) = 0$, $i = k+1, \dots, n$ und wir erhalten

$$[\varphi]_{C,B} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ mit $r = k = rg(\varphi)$

c) $A, B \in Mat(m \times n, K)$

A, B äquivalent $\Leftrightarrow rg(A) = rg(B)$

<u>Beweis</u> $\Rightarrow$: Nach Def. und 3.2.21

$\Leftarrow$: $r := rg(A) = rg(B)$

$\varphi: K^{(n)} \longrightarrow K^{(m)}, x \longmapsto Ax$

Nach b) ex. Basen B, C mit

$$[\varphi]_{C,B} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel:

$$[\varphi]_{C,B} = \underbrace{[id]_{C,\mathcal{E}_m}}_{=:S} \underbrace{[\varphi]_{\mathcal{E}_m,\mathcal{E}_n}}_{=A} \underbrace{[id]_{\mathcal{E}_n,B}}_{=:T}$$

$\Rightarrow A$ äquiv. zu $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Analog B äquiv. zu $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A$ und B sind äquivalent.

Der Beweis zeigt, daß

$$\left\{ \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(m \times n, K) \;\middle|\; 0 \leq r \leq \min(m,n) \right\}$$

ein vollständiges Repräsentantensystem

ist.