Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 15.03.2013
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1: Matrizen (2+2 Punkte)

a.) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1000 & 1000 & 1000 & 1000 \\ 998 & 999 & 1000 & 1000 \\ 996 & 997 & 1000 & 1000 \\ 1000 & 1000 & 999 & 998 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b.) Berechnen Sie von den folgenden reellen Matrizen die LR-Zerlegung, die Determinante und die Inverse:

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 8 \\ 5 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Determinanten von Endomorphismen (2+2 Punkte)

a.) Berechnen Sie die Determinante des Endomorphismus $\psi : \mathbb{R}[t]_{|3} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{|3}$, der wie folgt gegeben ist:

$$1 \mapsto 3 + t + 2t^3, \qquad 1 + t + t^2 \mapsto 2t + 3t^2 + 5t^3,$$
$$1 + t \mapsto 4 + 2t - t^2 + t^3, \qquad 1 + t + t^2 + t^3 \mapsto 4 + 2t + 5t^2 - t^3.$$

b.) Es sei V der Vektorraum der schiefsymmetrischen reellen 3×3 Matrizen:

$$V := \{A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}.$$

Für festes $B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ wird wie folgt ein Endomorphismus von V definiert:

$$\psi\colon V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad A \mapsto B^t \cdot A \cdot B.$$

Berechnen Sie $\det(\psi)$ für:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 3: Darstellende Matrizen (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[f]_{C,B}$ für die folgenden linearen Abbildungen:

a.)

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \qquad B := C := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right).$$

b.)

$$f\colon \operatorname{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad A \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$B := C := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

c.)

$$\psi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}, \; B := \mathcal{E}_4, \; C := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right).$$

d.)

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} 3x \\ -x \\ 5x \end{pmatrix}, \; B := (1), \; C := \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 4: Diagonalisierbarkeit (2+2 Punkte)

a.) Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen in $\operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$ diagonalisierbar sind:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b.) Welche der folgenden reellen Matrizen ist diagonalisierbar ?

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie im Falle der Diagonalisierbarkeit ein $C \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$, so daß $C^{-1}AC$ bzw. $C^{-1}BC$ eine Diagonalmatrix ist.

Es geht noch weiter

Aufgabe 5: Spezielle Endomorphismen (2+2 Punkte)

a.) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus von V mit $\psi \circ \psi = \psi$. Zeigen Sie, daß ψ diagonalisierbar ist.
(Hinweis: Welche Eigenwerte kann ψ haben ? Inwiefern treten $\ker(\psi)$ und $\mathrm{im}(\psi)$ als Eigenräume auf? Beachten Sie dabei Aufgabe 3, Blatt 9, LAI.)

b.) Sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ mit dem charakteristischen Polynom $\chi_A = (t-\lambda)^2$. Zeigen Sie: $(A - \lambda \cdot E_2)^2 = 0$.

(Beachten Sie dabei im Skript den Abschnitt über die Klassifikation von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ bis auf Konjugation.)

Aufgabe 6: Orthonormalbasen von Eigenvektoren (4 Punkte)

Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Gegeben seien die beiden folgenden diagonalisierbaren Matrizen aus $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für jede dieser Matrizen eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren der Matrix, wenden Sie auf diese Basis das Gram-Schmidt-Verfahren an und zeigen Sie, daß Sie dadurch eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der jeweiligen Matrix erhalten.

und noch immer kein Ende

Aufgabe 7: Gram-Schmidt-Verfahren (2+2 Punkte)

a.) Zeigen Sie, daß die durch die folgende Vorschrift auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt definiert wird und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des dadurch gegebenen euklidischen Raums:

$$\beta(x,y) := 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2 \quad \text{für } x = (x_1, x_2), \;\; y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

b.) Versehen Sie $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 \quad \text{für } x = (x_1, x_2), \;\; y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

und wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die folgende Basis des $\mathbb{R}^2$ an, um eine Orthogonalbasis zu konstruieren:

$$B := ((4,1),\ (2,5)).$$

Zusatz(0 Punkte): Geben Sie anhand einer Skizze eine geometrische Interpretation des Gram-Schmidt-Verfahrens.

Aufgabe 8: Gram-Schmidt-Verfahren und QR-Zerlegung (2+2 Punkte)

a.) Bestimmen Sie von der folgenden Matrix die QR-Zerlegung:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b.) Zeigen Sie, daß die durch die folgende Vorschrift auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[t]_{|3}$ ein Skalarprodukt definiert wird und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des dadurch gegebenen euklidischen Raums:

$$\beta(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Abgabe am Montag, 08.04.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.