Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 15.03.2013

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1: Basiswechsel (2+2 Punkte)

a.) Es seien die folgenden Basen B von $\mathbb{R}^3$ und C von $\mathbb{R}^4$ gegeben:

$$B := \big((1,0,1),\ (-1,1,1),\ (2,1,1)\big),$$
$$C := \big((1,0,0,0),\ (1,1,0,0),\ (1,1,1,0),\ (1,1,1,1)\big).$$

Bestimmen Sie zu der folgenden linearen Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die darstellende Matrix $[\psi]_{C,B}$:

$$\psi\colon \quad (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1+x_2+2x_3,\ 3x_1+x_2+4x_3,\ 2x_2+x_3,\ 3x_1+2x_2+4x_3).$$

b.) Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Bernstein-Polynome $p_{i,n} \in \mathbb{R}[t]$, $i = 0,\dots,n$ definiert:

$$p_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i.$$

1.) Zeigen Sie, daß die Polynome $p_{0,n},\dots,p_{n,n}$ eine Basis von $\mathbb{R}[t]_{|n}$ bilden.

2.) Stellen Sie das Polynom $1+t+t^2+t^3$ als Linearkombination der Polynome $p_{0,3},\dots,p_{3,3}$ dar.

Aufgabe 2: Konjugierte Matrizen (1+1+2 Punkte)

a.) Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ konjugiert sind:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b.) Sei $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß A in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ zu der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ konjugiert ist.

c.) Zeigen Sie, daß in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ zwei Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ genau dann konjugiert sind, wenn $|n| = |m|$.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Eigenräume (1+1+1+1 Punkte)

a.) Untersuchen Sie, ob die folgende reelle Matrix diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b.) Bestimmen Sie zu der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ ein $\Gamma \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so daß $\Gamma^{-1} A\, \Gamma$ eine Diagonalmatrix ist:

$$A := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

c.) Bestimmen Sie zu der folgenden linearen Abbildung die Eigenräume und untersuchen Sie die Abbildung auf Diagonalisierbarkeit:

$$\psi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_4 \\ 2x_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

d.) Geben Sie zu der folgenden linearen Abbildung sämtliche Eigenwerte an sowie die zugehörigen Eigenräume:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + 2y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Beweisaufgabe (1+2+1 Punkte) Sei K ein Körper.

a.) Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ heißen äquivalent, wenn gilt:

$$\exists S \in \mathrm{GL}_m(K), T \in \mathrm{GL}_n(K): \quad B = SAT.$$

Zeigen Sie, daß dadurch tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$ definiert ist.

b.) Sei $\varphi\colon K^{[n]} \longrightarrow K^{[m]}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß es jeweils eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von $K^{[n]}$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ von $K^{[m]}$ gibt, sodaß die darstellende Matrix $[\varphi]_{C,B}$ die folgende Gestalt hat:

$$[\varphi]_{C,B} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K).$$

Hinweis: Ergänzen Sie dazu eine Basis von $\ker(\varphi)$ und betrachten Sie die davon induzierte Basis von $\mathrm{im}(\varphi)$.

c.) Zeigen Sie, daß zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ genau dann äquivalent sind, wenn Sie den gleichen Rang haben und geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen an.

Abgabe am Freitag, 22.03.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.