Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 08.03.2013
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1: Darstellende Matrizen (4 Punkte)
Das System $B := \big((1,2,1),\ (2,3,3),\ (3,7,1)\big)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Durch die folgende Zuordnung wird eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definiert:

$$(1,2,1) \mapsto (1,1,-6), \quad (2,3,3) \mapsto (3,1,4), \quad (3,7,1) \mapsto (5,2,3).$$

Bestimmen Sie die folgenden darstellenden Matrizen von ψ:

$$[\psi]_{\mathcal{E}_3,B}, \quad [\psi]_{B,B}, \quad [\psi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} \quad \text{und} \quad [\psi]_{B,\mathcal{E}_3}.$$

Aufgabe 2: Dualräume (1+3 Punkte)

a.) Sei V ein K-Vektorraum mit gegebener Basis $B = (b_1, ..., b_n)$. Bestimmen Sie für alle Elemente der dualen Basis $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ von V^* die darstellende Matrix $[b_i^*]_{\mathcal{E}_1,B}$.

b.) Seien V, W jeweils K-Vektorräume mit gegebenen Basen $B = (b_1, ..., b_n)$ und $C = (c_1, ..., c_n)$. Weiter sei eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ gegeben. Die zu f duale Abbildung ist definiert als die folgende lineare Abbildung:

$$f^*\colon W^* \longrightarrow V^* \quad \text{mit} \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f.$$

1.) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[f^*]_{B^*,C^*}$.
2.) Zeigen Sie: f surjektiv $\implies$ f^* injektiv.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Polynomräume (2+2 Punkte)

a.) Gegeben sei der Polynomvektorraum $\mathbb{R}[t]_{|n}$ mit der Basis $B := (1, t, t^2, \ldots, t^n)$ und die folgende lineare Abbildung:

$$I_{0,1} : \mathbb{R}[t]_{|n} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad p \mapsto \int_0^1 p(t)dt.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[I_{0,1}]_{\mathcal{E}_1,B}$ und zeigen Sie, daß für alle $p \in \mathbb{R}[t]_{|n}$ gilt:

$$[I_{0,1}]_{\mathcal{E}_1,B} \cdot [p]_B = \int_0^1 p(t)dt,$$

wobei $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}$ kanonisch identifiziert werden.

b.) Sei im Polynomvektorraum $\mathbb{R}[t]_{|3}$ die folgende Basis gegeben:

$$B := (1,\ 1+t,\ 1+t+t^2,\ 1+t+t^2+t^3).$$

Weiter sei $\psi : \mathbb{R}[t]_{|3} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{|2}$ diejenige lineare Abbildung mit

$$1 \mapsto t, \quad 1+t \mapsto t+t^2, \quad 1+t+t^2 \mapsto 3t^2, \quad 1+t+t^2+t^3 \mapsto 2t.$$

Bestimmen Sie Basen von Bild und Kern dieser linearen Abbildung.

Aufgabe 4: Matrizenvektorraum (3+1 Punkte)

Es sei K ein Körper und $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$ eine fest gegebene Matrix. Weiter wird der folgende Untervektorraum von $\mathrm{Mat}_2(K)$ betrachtet:

$$U := \{ A \in \mathrm{Mat}_2(K) \mid \mathrm{sp}(A) = 0 \}.$$

Eine Basis von U ist gegeben durch:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

a.) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[\psi]_{B,B}$ für den folgenden Endomorphismus von U:

$$\psi : U \longrightarrow U \quad \text{mit} \quad A \mapsto SAS^{-1}.$$

b.) Zeigen Sie: $[\psi]_{B,B} \in \mathrm{SL}_3(K)$.

Abgabe am Freitag, 15.03.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.