Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 01.03.2013
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1: Adjungierte Matrizen (3+1 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

a.) Zeigen Sie für $A, B \in \mathrm{GL}_n(R)$ folgende Formeln:

$$\begin{aligned} (AB)^{\mathrm{ad}} &= B^{\mathrm{ad}} A^{\mathrm{ad}}, \\ \det(A^{ad}) &= \det(A)^{n-1}, \\ (A^{\mathrm{ad}})^{\mathrm{ad}} &= \big(\det(A)\big)^{n-2} \cdot A, \\ (A^{\mathrm{ad}})^{-1} &= (A^{-1})^{\mathrm{ad}}. \end{aligned}$$

b.) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ heißt symmetrisch, wenn $A = A^t$ erfüllt ist. Zeigen Sie:

$$A \text{ ist symmetrisch und invertierbar} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} \text{ ist symmetrisch.}$$

Aufgabe 2: Polynome (1+1+2 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

a.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Polynome aus $\mathbb{Z}[t]_{|2}$ linear unabhängig sind und ob Sie eine Basis dieses $\mathbb{Z}$-Moduls bilden:

$$5 + 3t + 6t^2, \quad 6 + 4t + 7t^2, \quad 7 + 5t + 9t^2.$$

b.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Polynome aus $\mathbb{Z}_4[t]_{|2}$ linear unabhängig sind und ob Sie eine Basis dieses $\mathbb{Z}_4$-Moduls bilden:

$$[1]_4 + [3]_4 t + [2]_4 t^2, \quad [2]_4 + [3]_4 t^2, \quad [3]_4 + t + t^2.$$

c.) Zeigen Sie für eine formale Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in R[[t]]$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \text{ ist eine Einheit in } R[[t]] \quad \Longleftrightarrow \quad a_0 \text{ ist eine Einheit in } R.$$

Bitte wenden

Aufgabe 3: charakteristische Polynome (2+2 Punkte)
Berechnen Sie die charakteristischen Polynome der folgenden Matrizen:
a.)

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} [1]_5 & [2]_5 & [3]_5 \\ [4]_5 & [3]_5 & [3]_5 \\ [0]_5 & [0]_5 & [0]_5 \end{pmatrix}.$$

b.)

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Beweisaufgabe: Inverse Matrizen (2+2 Punkte)

a.) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, und die Koeffizienten von A seien alle aus $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die Koeffizienten von A^{-1} liegen alle in $\mathbb{Q}$, und es gilt:

$$\det(A) \in \{\pm 1\} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Die Koeffizienten von } A^{-1} \text{ liegen alle in } \mathbb{Z}.$$

b.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie:

$$A \text{ invertierbar} \iff a_{ii} \in R^* \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, daß in diesem Fall die Inverse A^{-1} von A wieder eine obere Dreiecksmatrix ist.

Abgabe am Freitag, 08.03.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.