Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 22.02.2013

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1: Cramersche Regel und Laplace (2+2 Punkte)

a.) Berechnen Sie von den folgenden Matrizen die Inverse mit Hilfe der aus der Cramerschen Regel entwickelten Formel: $A^{-1} = \big(\det(A)\big)^{-1} \cdot A^{\mathrm{ad}}$.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} [5]_7 & [5]_7 & [4]_7 \\ [2]_7 & [5]_7 & [6]_7 \\ [2]_7 & [2]_7 & [5]_7 \end{pmatrix}.$$

b.) Berechnen Sie von den folgenden Matrizen die Determinanten:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -3 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 3-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3-t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3-t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Determinanten (2+4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a.)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ab & b^2+1 & bc & bd \\ ac & bc & c^2+1 & cd \\ ad & bd & cd & d^2+1 \end{pmatrix}.$$

b.)

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n & a_n \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} t & & & & & a_0 \\ -1 & t & & & & a_1 \\ & -1 & t & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & -1 & t & a_{n-1} \\ & & & & -1 & t+a_n \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 3: Multilinearformen (1+1 Punkte)

a.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, daß die Ringmultiplikation $R \times R \longrightarrow R$, $(a, b) \mapsto ab$ eine Bilinearform auf R ist.

b.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $c \in R$. Zeigen Sie, daß folgende Abbildung $\Phi\colon R^2 \times R^2 \longrightarrow R$ eine alternierende Bilinearform ist:

$$\Phi(x, y) = c(x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad \text{mit} \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2.$$

Aufgabe 4: Beweisaufgabe: Block-Dreiecks-matrizen (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ eine obere Block-Dreiecks-matrix der Form:

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & A_{k-1} & \\ & & & & A_k \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_i \in \mathrm{Mat}_{n_i}(R) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Beweisen Sie folgende Formel:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i).$$

Abgabe am Freitag, 01.03.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.