Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 15.02.2013
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1: Berechnung von Determinanten (3+1 Punkte)

a.) Berechnen Sie von den folgenden Matrizen die Determinanten:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \,,$$

$$C := \begin{pmatrix} [3]_5 & [3]_5 & [3]_5 \\ [3]_5 & [2]_5 & [1]_5 \\ [1]_5 & [4]_5 & [1]_5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}_5) \quad , \quad D := \begin{pmatrix} [5]_7 & [5]_7 & [4]_7 \\ [2]_7 & [5]_7 & [6]_7 \\ [2]_7 & [2]_7 & [4]_7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}_7).$$

b.) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\pi_n \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ mit $a \mapsto [a]_n$ der kanonische Ringhomomorphismus. Für $A \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{Z})$ mit $A = (a_{ij})$ sei $\pi_n(A) := \big(\pi_n(a_{ij})\big) \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{Z}_n)$. Zeigen Sie: $\det(\pi_n(A)) = \pi_n\big(\det(A)\big)$.

Aufgabe 2: Invertierbarkeit und Determinanten (2+1+1 Punkte)

a.) Gegeben sei die Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie:

$$A \text{ invertierbar} \iff \det(A) \neq 0,$$

und im Fall der Invertierbarkeit gilt:

$$A^{-1} := \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

b.) Beweisen Sie die folgende Aussage über $\mathbb{Z}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{invertierbar} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{ggT}(a,b) = 1.$$

c.) Geben Sie eine Matrix aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ an, die nicht invertierbar ist über $\mathbb{Z}$, aber aufgefasst als Element von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ invertierbar ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Determinantenabbildung (2+2 Punkte)
Es sei definiert:

$$B := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ [0]_3 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_3) \mid \det(A) \neq [0]_3 \right\}.$$

a.) Zeigen Sie, daß B eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ ist, und geben Sie die Elemente von B und deren Determinante an.

b.) Die Determinantenabbildung kann auf B eingeschränkt werden:

$$\Phi\colon B \longrightarrow \mathbb{Z}_3^* \quad \text{mit} \quad \Phi(A) := \det(A).$$

Sei $U := \ker(\Phi)$. U ist dann ein Normalteiler von B. Geben Sie die Quotientengruppe B/U und ihre Verknüpfungstafel an.

Aufgabe 4: Beweisaufgabe (2+1+1 Punkte)

Für jede Gruppe G ist ihr Zentrum definiert durch

$$Z(G) := \{\, g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G \,\}.$$

(Vgl. Skript 3.3.13.ii.) und LAI, Aufgabenblatt 6, Aufgabe 3.)

a.) Beweisen Sie für einen kommutuativen Ring R mit 1:

$$Z\big(\mathrm{GL}_n(R)\big) = \{\, \alpha \cdot E_n \mid \alpha \in R^* \,\} \quad \text{und} \quad Z\big(\mathrm{SL}_n(R)\big) = \{\, \alpha \cdot E_n \mid \alpha \in R^*, \alpha^n = 1 \,\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $L_{ij}(1) \cdot A = A \cdot L_{ij}(1)$.

b.) Zeigen Sie für einen endlichen Körper K mit q Elementen:

$$|Z\big(\mathrm{SL}_n(K)\big)| = \mathrm{ggT}(n, q-1).$$

Benutzen Sie dabei, daß K^* eine zyklische Gruppe der Ordnung $q-1$ ist.

c.) Geben Sie die Elemente der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ an.
Ist diese Gruppe zu $\mathbb{Z}_6$ oder zu S_3 isomorph?

Abgabe am Freitag, 22.02.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.