Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 11.02.2013
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIa
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1: Invertieren von Matrizen(2+2 Punkte)

a.) Berechnen Sie von der folgenden Matrix über $\mathbb{Z}_5$ die Inverse:

$$A := \begin{pmatrix} [3]_5 & [3]_5 & [3]_5 \\ [3]_5 & [2]_5 & [1]_5 \\ [1]_5 & [4]_5 & [1]_5 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{Z}_5).$$

b.) Berechnen Sie von der folgenden Matrix über $\mathbb{Z}_7$ die Inverse:

$$B := \begin{pmatrix} [5]_7 & [5]_7 & [4]_7 \\ [2]_7 & [5]_7 & [6]_7 \\ [2]_7 & [2]_7 & [4]_7 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{Z}_7).$$

Aufgabe 2: Untere Dreicksmatrizen (2+2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und seien $b_{21}, b_{31}, b_{41}, b_{32}, b_{42}, b_{43} \in R$. Die folgenden Matrizen $L_{i,j}(\lambda)$ seien wie in 3.2.3 definiert.

a.) Zeigen Sie:

$$L_{21}(b_{21})L_{31}(b_{31})L_{41}(b_{41})L_{32}(b_{32})L_{42}(b_{42})L_{43}(b_{43}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & 1 \end{pmatrix}.$$

b.) Berechnen Sie über $R := \mathbb{Z}$ das Matrizenprodukt:

$$L_{43}(7)L_{42}(6)L_{32}(5)L_{41}(4)L_{31}(3)L_{21}(2).$$

(Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem ersten Teil der Aufgabe!)

Aufgabe 3: LR-Zerlegung (3+1 Punkte)

a.) Berechnen Sie die LR-Zerlegungen der folgenden reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 0 \\ 1 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 9 \\ -3 & -2 & 4 & -11 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b.) Gegeben sei folgende Matrix aus $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß es keine untere Dreiecksmatrix L und obere Dreiecksmatrix R gibt mit $A = LR$.

Aufgabe 4: Beweisaufgabe (3+1 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(e_1, ..., e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Zu jedem $\sigma \in S_n$ sei die folgende lineare Abbildung $\varphi_\sigma \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$ definiert. Weiterhin sei $P_\sigma := [\varphi_\sigma]$.

a.) Beweisen Sie, daß die folgende Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist:

$$\Psi \colon S_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \sigma \mapsto P_\sigma.$$

b.) Bestimmen Sie $P_\sigma \in GL_3(\mathbb{R})$ für $\sigma = (1\,2\,3) \in S_3$.

Abgabe am Freitag, 15.02.2013, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.