Klausur zur Linearen Algebra IIa HWS 2013, 24.08.2013
Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Definieren Sie die zusätzlichen Eigenschaften, mit denen eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ zu einem Skalarprodukt auf V wird.
ii.) (1P) Formulieren Sie die Cramersche Regel.
iii.) (1P) Sei $\big(V, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum. Definieren Sie die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Metrik auf V.
iv.) (2P) Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Definieren Sie die Begriffe Eigenwert und Eigenraum von A.
v.) (1P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Definieren Sie, wann φ diagonalisierbar ist.
vi.) (1P) Sei $\big(V, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x, y \in V$. Definieren Sie, wann x und y orthogonal sind.

Lösung:

i.) Ein Skalarprodukt ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.
Symmetrisch bedeuted: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ für alle $x, y \in V$.
Positiv definit bedeutet: $\langle x, x \rangle > 0$ für alle $x \in V$ mit $x \neq 0$.
ii.) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Dann gilt:
$$A^{ad} \cdot A = A \cdot A^{ad} = \det(A) \cdot E_n.$$
iii.) $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y\,,\, x - y \rangle}$.
iv.) $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \cdot E_n)z = 0$ eine nicht-triviale Lösung hat. Der dazugehörige Lösungsraum heißt der Eigenraum von A zum Eigenwert λ und wird mit $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ notiert.
v.) Es gibt eine Basis B von V, so daß $[\varphi]_{B,B}$ eine Diagonalmatrix ist.
vi.) x und y sind orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ gilt.

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Berechnen Sie $\det(A)$ für die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} b & 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 & f \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

ii.) (2P) Führen Sie für die folgende Matrix die Laplace-Entwicklung nach der zweiten Zeile durch und berechnen Sie damit deren Determinante:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

iii.) (4P) Gegeben seien die folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_6)$:

$$A := \begin{pmatrix} [3]_6 & [1]_6 \\ [1]_6 & [2]_6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} [4]_6 & [2]_6 \\ [1]_6 & [1]_6 \end{pmatrix}.$$

a.) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und berechnen Sie A^{-1}.
b.) Bestimmen Sie $\det(A \cdot B)$.
c.) Ist $A \cdot B$ invertierbar (Begründung)?

Lösung:

i.) Werden in A die erste und die dritte Spalte und anschließend die zweite und die dritte Zeile vertauscht, entsteht eine obere Dreicksmatrix, deren Determinante das Produkt deren Diagonalelemente ist. Dies liefert (Vorzeichenwechsel beachten!):

$$\det(A) = -\det \begin{pmatrix} d & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & f \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} d & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abcd$$

ii.) Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= -4 \cdot (-6) + 5 \cdot (-12) - 6 \cdot (-6) = 0. \end{aligned}$$

iii.) a.) Es gilt:

$$\det(A) = [3]_6 \cdot [2]_6 - [1]_6 \cdot [1]_6 = [5]_6,$$

und $[5]_6$ ist in $\mathbb{Z}_6$ eine Einheit mit $[5]_6^{-1} = [5]_6$. Daraus folgt, daß A invertierbar ist und gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^{\mathrm{ad}} = [5]_6^{-1} \cdot \begin{pmatrix} [2]_6 & [5]_6 \\ [5]_6 & [3]_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [4]_6 & [1]_6 \\ [1]_6 & [3]_6 \end{pmatrix}.$$

b.) Es gilt $\det(B) = [2]_6$, und nach dem Determinantenmultiplikationssatz folgt mit der schon berechneten Determinante von A aus vorherigem Teil:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = [5]_6 \cdot [2]_6 = [4]_6.$$

c.) $\det(A \cdot B) = [4]_6$ ist wegen $[3]_6 \cdot [4]_6 = [0]_6$ in $\mathbb{Z}_6$ ein Nullteiler und damit keine Einheit, so daß $A \cdot B$ nicht invertierbar ist.

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.
  a.) Geben Sie zwei Konjugationsinvarianten von A an.
  b.) Geben Sie zwei hinreichende Kriterien an, daß A diagonalisierbar ist.

ii.) (2P) Untersuchen Sie (mit Begründung), ob die folgenden Matrizen A, B bzw. C, D aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ jeweils konjugiert sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

iii.) (4P) Geben Sie eine zu der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ konjugierte Diagonalmatrix und eine Basis des $\mathbb{R}^{[3]}$ aus Eigenvektoren von A an:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

i.) a.) Von folgenden Konjugationsinvarianten von A genügen zwei zur Lösung der Aufgabe:
  1.) $\det(A)$.
  2.) χ_A.
  3.) $\mathrm{spur}(A)$.
  4.) Eigenwerte von A.

b.) Zwei der folgenden hinreichenden Kriterien für die Diagonalisierbarkeit von A genügen für die Lösung der Aufgabe:
  1.) A hat n paarweise verschiedene Eigenwerte.
  2.) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A, so gilt:

$$\sum_{j=1}^{r} \dim_K(\mathrm{Eig}(A, \lambda_j) = n.$$

  3.) $K^{[n]}$ besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von A.
  4.) Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$, so daß SAS^{-1} eine Diagonalmatrix ist.

ii.) a.) A und B sind nicht konjugiert, denn wegen $A = 2 \cdot E_2$ gilt $SAS^{-1} = A \neq B$ für alle $S \in \mathrm{GL}_n(K)$.

b.) C und D sind konjugiert, denn D hat die zwei verschiedenen Eigenwerte 2 und 3 und ist somit diagonalisierbar. Dabei ist C eine der beiden möglichen Diagonalmatrizen, zu der D konjugiert sein kann (Satz 3.4.52 und Lemma 3.4.59).

iii.) Es gilt (entwickeln von $\det(t \cdot E_3 - A)$ nach der letzte Zeile):

$$\chi_A = (t-7) \cdot [(t-3) \cdot (t-5) - 8] = (t-7)(t^2 - 8t + 7) = (t-7)^2(t-1),$$

und A besitzt damit die Eigenwerte 1 und 7. Die Eigenräume werden durch das Lösen der jeweiligen homogenen linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda \cdot E_3)z = 0$ berechnet. Beim Eigenwert 7 ergibt sich:

$$A - 7 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und der zugehörige Eigenraum ist:

$$\mathrm{Eig}(A,7) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle.$$

Beim Eigenwert 1 ergibt sich:

$$A - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

und es folgt für den Eigenraum:

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Eine Basis des $\mathbb{R}^{[3]}$ aus Eigenvektoren von A ist dann gegeben durch:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ist S die Matrix mit den Spalten der Basisvektoren aus B, so gilt:

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden g, die von $(1,1)$ erzeugt wird: $g := \langle(1,1)\rangle$. Wählen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie dazu $[\varphi]_{B,B}$.

ii.) (2P) Für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \{\, f \in \mathbb{R}[t] \mid \operatorname{grad}(f) \leq 2\,\}$ der rellen Polynome mit einem Grad höchstens Zwei sei der folgende Endomorphismus gegeben:

$$\varphi\colon V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad f \mapsto f' \quad \text{(Ableitung)}.$$

Wählen Sie eine Basis C von V und bestimmen Sie dazu $[\varphi]_{C,C}$.

iii.) (4P) Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]}$, deren darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^{[3]}$ wie folgt aussieht:

$$C := [\varphi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Weiter sei die folgende Basis B von $\mathbb{R}^{[3]}$ gegeben:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Berechnen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $A := [\varphi]_{B,B}$, so daß folgende Gleichung erfüllt ist:

$$S \cdot C \cdot S^{-1} = A.$$

Lösung:

i.) Der Vektor $(1,-1)$ steht senkrecht auf dem Vektor $(1,1)$, so daß für die Basis $B := \big((1,1),(1,-1)\big)$ des $\mathbb{R}^2$ die Bilder unter der Spiegelung leicht berechnet werden können:

$$\varphi(1,1) = (1,1) \quad \text{und} \quad \varphi(1,-1) = (-1,1) = -(1,-1).$$

Dies liefert sofort die Matrizendarstellung:

$$[\varphi]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eine andere Lösung ergibt sich durch die Wahl der Standard-Basis $B := \big((1,0),(0,1)\big)$ des $\mathbb{R}^2$. Auch deren Bilder unter der Spiegelung lassen sich leicht angeben:

$$\varphi(1,0) = (0,1) \quad \text{und} \quad \varphi(0,1) = (1,0).$$

Dies liefert dann die folgende Matrizendarstellung von φ:

$$[\varphi]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii.) Eine geschickte Basis ist $C := (1, t, t^2)$, deren Ableitungen leicht zu berechnen sind:

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(t) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi(t^2) = 2t.$$

Damit ergibt sich folgende Matrizendarstellung von φ:

$$[\varphi]_{C,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii.) Der Basiswechselsatz 3.4.33 liefert:

$$A = [\varphi]_{B,B} = [\mathrm{id}]_{B,\mathcal{E}_3} \cdot [\varphi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_3,B} = [\mathrm{id}]_{B,\mathcal{E}_3} \cdot C \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_3,B} = [\mathrm{id}]_{B,\mathcal{E}_3} \cdot C \cdot [\mathrm{id}]_{B,\mathcal{E}_3}^{-1}.$$

Weiter gilt:

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_3,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\mathrm{id}]_{B,\mathcal{E}_3} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_3,B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wird nun $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ definiert durch:

$$S := [\mathrm{id}]_{B,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so gilt $A = SCS^{-1}$, und es ergibt sich:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & 11 \\ -1 & -10 & -20 \\ 4 & 7 & 15 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii.) (2P) Überprüfen Sie, ob die folgenden symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$ positiv definit sind:

$$\delta(x,y) := 3x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 + 2x_2y_2.$$
$$\gamma(x,y) := 2x_1y_1 - 4x_2y_2.$$

iii.) (2P) Bestimmen Sie für $x := (1,1) \in \mathbb{R}^2$ bzgl. des folgenden Skalarproduktes

$$\langle x, y \rangle := 3x_1y_1 + 2x_2y_2$$

einen normierten Vektor $y \in \mathbb{R}^2$, der senkrecht auf x steht.

Lösung:

i.) Die Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Spalten von A ergibt:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{9}{3} \cdot w_1 - \frac{-4}{2} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert eine erste Zerlegung von A (siehe Satz 4.1.28 oder Beispiel 4.1.30):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Normierung der Spalten w_1, w_2, w_3 liefert die QR-Zerlegung von A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 3\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

ii.) Es gilt $\delta((1,-1),(1,-1)) = -5 < 0$, daher ist δ nicht positiv definit.
Es gilt $\gamma((0,1),(0,1)) = -4 < 0$, daher ist γ nicht positiv definit.

iii.) Ein y senkrecht zu x muß erfüllen: $\langle (1,1), y \rangle = 3y_1 + 2y_2 = 0$, und dies ist für $(-2,3)$ gegeben. Vielfache dieses Vektors stehen dann auch senkrecht auf x, so daß $(-2,3)$ einfach normiert werden kann, und es ergibt sich ein Lösungsvektor durch:

$$y := \frac{1}{\|(-2,3)\|}(-2,3) = \frac{1}{\sqrt{3\cdot(-2)^2 + 2\cdot 3^2}}(-2,3) = \frac{1}{\sqrt{30}}(-2,3).$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Für $\alpha \in [0, 2\pi[$ hat die Drehung im $\mathbb{R}^{[2]}$ um den Winkel α eine Matrizendarstellung der Form:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

$$D_\alpha \text{ besitzt einen Eigenwert} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \{0, \pi\}.$$

Hinweis: Es gilt die Gleichung $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$.

ii.) (2P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und es seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Zeigen Sie:

$$A, B \text{ sind konjugiert} \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = \det(B).$$

iii.) (2P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Beweisen Sie:

$$\varphi \text{ ist ein Isomorphismus} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \text{ ist kein Eigenwert von } \varphi.$$

iv.) (2P) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, und seien $v, w \in \mathbb{R}^{[n]}$ mit $v, w \neq 0$, $Av = 3v$ und $Aw = 2w$. Zeigen Sie: v und w sind linear unabhängig.

Lösung:

i.) Für das charakteristische Polynom von D_α gilt:

$$\chi_{D_\alpha} = t^2 - 2\cos(\alpha) \cdot t + 1.$$

D_α hat genau dann Eigenwerte, wenn dieses Polynom reelle Nullstellen hat. Die *pq*-Formel für dessen Nullstellen liefert dann mit $1 = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2$:

$$t_{1/2} = \cos(\alpha) \pm \sqrt{\cos(\alpha)^2 - 1} = \cos(\alpha) \pm \sqrt{-\sin(\alpha)^2}$$

Reelle Nullstellen dieses Polynoms existieren genau dann, wenn $-\sin(\alpha)^2 \geq 0$ gilt, und wegen $\sin(\alpha)^2 \geq 0$ ist dies für $\alpha \in [0, 2\pi[$ genau dann erfüllt für:

$$\sin(\alpha)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\alpha) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \{0, \pi\}.$$

ii.) Da A, B konjugiert sind, existiert ein $S \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $A = SBS^{-1}$. Daraus ergibt sich mit dem Determinantenmultiplikationssatz und der Kommutativität von R:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(SBS^{-1}) \\ &= \det(S)\det(B)\det(S^{-1}) \\ &= \det(S)\det(S^{-1})\det(B) \\ &= \det(SS^{-1})\det(B) \\ &= \det(E_n)\det(B) \\ &= \det(B). \end{aligned}$$

Matrikelnummer:

iii.) Da V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum ist, gilt nach Lemma 2.2.60:

$$\varphi \text{ bijektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ injektiv.}$$

Nach Lemma 2.1.27 gilt:

$$\varphi \text{ injektiv} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker(\varphi) = \{0\}.$$

Nach Bemerkung 3.4.51 gilt wegen $\ker(\varphi) = \ker(\varphi - 0 \cdot \mathrm{id}) = \mathrm{Eig}(\varphi, 0)$:

$$\ker(\varphi) = \{0\} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \text{ ist kein Eigenwert von } \varphi.$$

iv.) Es gelte $av + bw = 0$ mit $a, b \in K$. Anwenden von A auf diese Gleichung liefert:

$$0 = A(av + bw) = 3av + 2bw.$$

Andererseit folgt aus $av + bw = 0$ sofort $3av + 3bw = 0$.
Durch Subtraktion ergibt sich aus diesen Gleichungen dann die Gleichung $bw = 0$, und wegen $w \neq 0$ daraus $b = 0$. Weiter ist dann $av = 0$, und wegen $v \neq 0$ folgt damit $a = 0$.
Somit sind v und w linear unabhängig.