Klausur zur Linearen Algebra IIa HWS 2013, 24.08.2013
Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Definieren Sie die zusätzlichen Eigenschaften, mit denen eine Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V\longrightarrow\mathbb{R}$ zu einem Skalarprodukt auf V wird.

ii.) (1P) Formulieren Sie die Cramersche Regel.

iii.) (1P) Sei $\big(V,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum. Definieren Sie die von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Metrik auf V.

iv.) (2P) Sei K ein Körper und $A\in\mathrm{Mat}_n(K)$. Definieren Sie die Begriffe Eigenwert und Eigenraum von A.

v.) (1P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi\in\mathrm{End}_K(V)$. Definieren Sie, wann φ diagonalisierbar ist.

vi.) (1P) Sei $\big(V,\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $x,y\in V$. Definieren Sie, wann x und y orthogonal sind.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Berechnen Sie $\det(A)$ für die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} b & 0 & d & 0 \\ a & 0 & 0 & f \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

ii.) (2P) Führen Sie für die folgende Matrix die Laplace-Entwicklung nach der zweiten Zeile durch und berechnen Sie damit deren Determinante:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

iii.) (4P) Gegeben seien die folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_6)$:

$$A := \begin{pmatrix} [3]_6 & [1]_6 \\ [1]_6 & [2]_6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} [4]_6 & [2]_6 \\ [1]_6 & [1]_6 \end{pmatrix}.$$

a.) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und berechnen Sie A^{-1}.
b.) Bestimmen Sie $\det(A \cdot B)$.
c.) Ist $A \cdot B$ invertierbar (Begründung)?

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.
   a.) Geben Sie zwei Konjugationsinvarianten von A an.
   b.) Geben Sie zwei hinreichende Kriterien an, daß A diagonalisierbar ist.

ii.) (2P) Untersuchen Sie (mit Begründung), ob die folgenden Matrizen A, B bzw. C, D aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ jeweils konjugiert sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

iii.) (4P) Geben Sie eine zu der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ konjugierte Diagonalmatrix und eine Basis des $\mathbb{R}^{[3]}$ aus Eigenvektoren von A an:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden g, die von $(1,1)$ erzeugt wird: $g := \langle(1,1)\rangle$. Wählen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^2$ und bestimmen Sie dazu $[\varphi]_{B,B}$.

ii.) (2P) Für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \{\, f \in \mathbb{R}[t] \mid \operatorname{grad}(f) \leq 2 \,\}$ der rellen Polynome mit einem Grad höchstens Zwei sei der folgende Endomorphismus gegeben:

$$\varphi\colon V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad f \mapsto f' \quad \text{(Ableitung)}.$$

Wählen Sie eine Basis C von V und bestimmen Sie dazu $[\varphi]_{C,C}$.

iii.) (4P) Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]}$, deren darstellende Matrix bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^{[3]}$ wie folgt aussieht:

$$C := [\varphi]_{\mathcal{E}_3,\mathcal{E}_3} := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -6 & -2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Weiter sei die folgende Basis B von $\mathbb{R}^{[3]}$ gegeben:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Berechnen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $A := [\varphi]_{B,B}$, so daß folgende Gleichung erfüllt ist:

$$S \cdot C \cdot S^{-1} = A.$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

ii.) (2P) Überprüfen Sie, ob die folgenden symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$ positiv definit sind:

$$\delta(x, y) := 3x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 + 2x_2y_2.$$
$$\gamma(x, y) := 2x_1y_1 - 4x_2y_2.$$

iii.) (2P) Bestimmen Sie für $x := (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ bzgl. des folgenden Skalarproduktes

$$\langle\, x, y \,\rangle := 3x_1y_1 + 2x_2y_2$$

einen normierten Vektor $y \in \mathbb{R}^2$, der senkrecht auf x steht.

Matrikelnummer:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Für $\alpha \in [0, 2\pi[$ hat die Drehung im $\mathbb{R}^{[2]}$ um den Winkel α eine Matrizendarstellung der Form:
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie:
$$D_\alpha \text{ besitzt einen Eigenwert} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \in \{0, \pi\}.$$
Hinweis: Es gilt die Gleichung $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$.

ii.) (2P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und es seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Zeigen Sie:
$$A, B \text{ sind konjugiert} \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = \det(B).$$

iii.) (2P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Beweisen Sie:
$$\varphi \text{ ist ein Isomorphismus} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \text{ ist kein Eigenwert von } \varphi.$$

iv.) (2P) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, und seien $v, w \in \mathbb{R}^{[n]}$ mit $v, w \neq 0$, $Av = 3v$ und $Aw = 2w$. Zeigen Sie: v und w sind linear unabhängig.