Klausur zur Linearen Algebra IIa HWS 2013, 20.04.2013
Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$.
Definieren Sie $\det(A)$.

ii.) (1P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$.
Formulieren Sie dafür den Determinantenmultiplikationssatz.

iii.) (1P) Sei $\big(V, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum.
Formulieren Sie darin die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

iv.) (2P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Definieren Sie die Begriffe Eigenwert und Eigenraum von φ.

v.) (1P) Sei $\big(V, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum.
Definieren Sie darin eine Orthonormalbasis.

vi.) (1P) Sei V ein K-Vektorraum. Definieren Sie den Dualraum V^* von V.

vii.) (1P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$.
Definieren Sie das charakteristische Polynom χ_A von A.

Lösung:

i.) Nach Definition 3.3.1 gilt:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \Big(\mathrm{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \Big).$$

ii.) Es gilt nach Satz 3.3.8:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

iii.) Für $x, y \in V$ gilt nach Lemma 2.4.11:

$$|\langle\, x, y\,\rangle| \leq \sqrt{\langle\, x, x\,\rangle} \cdot \sqrt{\langle\, y, y\,\rangle}.$$

Nach Bemerkung 4.1.13 gilt auch die Version:

$$|\langle\, x, y\,\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

iv.) Nach Definition 3.4.50 ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ, wenn gilt:

$$\ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \neq \{0\}.$$

Der Eigenraum von φ zum Eigenwert λ ist definiert durch:

$$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) := \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{id}_V).$$

v.) Eine Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V heißt nach Definition 4.1.19 Orthonormalbasis von V, wenn gilt:

$$v_i \perp v_j \quad \text{für alle } i \neq j \text{ und } \|v_i\| = 1 \text{ für alle } i \in I.$$

vi.) Nach Definition 3.4.21 ist der Dualraum V^* von V definiert als:

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K).$$

vii.) Das charakteristische Polynom χ_A von A ist in Definition 3.3.50 definiert durch:

$$\chi_A = \det(t \cdot E_n - A).$$

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Berechnen Sie $\det(A)$ für die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii.) (1P) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Geben Sie die folgende Matrix an:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{ad}.$$

iii.) (1P) Berechnen Sie die folgende reelle Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1}.$$

iv.) (4P) Geben Sie alle Elemente der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ an und entscheiden Sie (mit Begründung), ob diese Gruppe zu S_3 oder zu $\mathbb{Z}_6$ isomorph ist.

Lösung:

i.) Vertausche erste und vierte Zeile, dann Blockdiagonalmatrix:

$$\det(A) = -\det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 36.$$

ii.) Es gilt nach Definition 3.3.29 und Bemerkung 3.3.31:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{ad} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

iii.) Es gilt nach Satz 3.3.37 und Beispiel 3.3.39:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

iv.) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ ist die folgende Menge:

$$\left\{ \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ ist nicht abelsch, da z.B. gilt:

$$\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{pmatrix}$$

Daher kann $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ als 6-elementige Gruppe nur zu S_3 isomorph sein, da es bis auf Isomorphie nur die 6-elementigen Gruppen S_3 und $\mathbb{Z}_6$ gibt.

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Geben Sie (mit Begründung) eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ an, so daß A keinen Eigenwert hat.

ii.) (1P) Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ diagonalisierbar mit den Eigenwerten:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = 2\lambda_3 = 1.$$

Bestimmen Sie χ_A.

iii.) (2P) Begründen Sie, warum je zwei der folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *nicht* zueinander konjugiert sind:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

iv.) (4P) Bestimmen Sie zu der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ ein $S \in GL_3(\mathbb{R})$, so daß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

i.) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ hat keinen Eigenwert, denn $\chi_A = t^2+1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Die Matrix ist die Darstellung der Drehung um neunzig Grad in der reellen Ebene bzgl. der Standard-Basis $\mathcal{E}_2$.

ii.) Es gilt:

$$\chi_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3) = (t-1)(t+1)(t-\tfrac{1}{2}).$$

iii.) A kann zu B, C, D jeweils nicht konjugiert sein, weil A eine andere Spur hat als diese Matrizen.
B kann zu C, D jeweils nicht konjugiert sein, weil B eine andere Determinante hat als diese Matrizen.
C und D können nicht konjugiert sein, weil C als $3 \cdot E_2$ nur zu sich selbst konjugiert ist.

iv.) Es gilt:

$$\chi_A = (t-3)(t^2-5t+6) = (t-3)^2(t-2).$$

Die Eigenwerte von A lauten also 2 und 3. Die Eigenräume werden durch das Lösen der jeweiligen homogenen linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda \cdot E_3)z = 0$ berechnet. Beim Eigenwert 3 ergibt sich:

$$A - 3 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

und es folgt:

$$\mathrm{Eig}(A,3) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Beim Eigenwert 2 ergibt sich:

$$A - 2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

und es folgt:

$$\mathrm{Eig}(A, 2) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Nun wird $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ gebildet, indem die Basisvektoren der Eigenräume als Spalten von S genommen werden:

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt damit:

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Betrachten Sie den folgenden Untervektorraum V von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$:

$$V := \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Es wird wie folgt ein Endomorphismus von V definiert:

$$\psi\colon V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $[\psi]_{B,B}$ für die folgende Basis B von V:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

ii.) (4P) Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[2]}$, deren darstellende Matrix bzgl. der Standardbasen des $\mathbb{R}^{[3]}$ und des $\mathbb{R}^{[2]}$ wie folgt aussieht:

$$[\varphi]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[\varphi]_{C,B}$ für die folgenden Basen C von $\mathbb{R}^{[2]}$ und B von $\mathbb{R}^{[3]}$:

$$C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right), \quad B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung:

i.) Für die Bilder der Basisvektoren aus $B := (b_1, b_2, b_3)$ unter ψ ergibt sich:

$$\psi(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\psi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\psi(b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten dieser Bildvektoren bzgl. der Basis B werden in die Spalten der darstellenden Matrix $[\psi]_{B,B}$ geschrieben:

$$[\psi]_{B,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii.) Es gilt nach dem Basiswechselsatz 3.4.33:

$$[\varphi]_{C,B} = [\mathrm{id}]_{C,\mathcal{E}_2} \cdot [\varphi]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_3,B} \ ,$$

und weiter gilt

$$[\mathrm{id}]_{C,\mathcal{E}_2} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_2,C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}_3,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich also:

$$[\varphi]_{C,B} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 & 31 \\ -4 & -7 & -12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Im $\mathbb{R}^2$ sei folgendes Skalarprodukt gegeben:

$$\langle\, x, y \,\rangle := 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Bestimmen Sie dazu für die Vektoren $x := (1, 1)$, $y := (-1, 1)$ die Werte von $\|x\|$ und $d(x, y)$, und prüfen Sie ob $x \perp y$ gilt.

ii.) (3P) Orthogonalisieren Sie die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^{[3]}$ bzgl. des Standardskalarprodukts mit dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

iii.) (3P) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

iv.) (1P) Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt versehen.
Geben Sie zu $x := (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^2$ an, für die gilt: $x \perp y$.

Lösung:

i.) Bezüglich der von $\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle$ induzierten Norm gilt:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{3 + 2 + 2 + 2} = 3 \quad \text{und} \quad d(x, y) = \|x - y\| = \|(2, 0)\| = \sqrt{12}.$$

Die Orthogonalität bezüglich $\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle$ wird geprüft:

$$\langle x, y\rangle = -3 + 2 - 2 + 2 = -1 \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \text{ und } y \text{ sind nicht orthogonal.}$$

ii.) Die Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens ergibt:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{12}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{15}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die sich durch das Gram-Schmidt-Verfahren ergebende Orthogonalbasis lautet somit:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

iii.) Zuerst wird das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Spalten von A angewendet, die eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{50}{25} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich eine erste Zerlegung von A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Normierung der Spalten w_1, w_2 folgt daraus die QR-Zerlegung von A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

iv.) Es gilt für $x := (1,2) \in \mathbb{R}^2$ und $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$x \perp y \iff y_1 + 2y_2 = 0.$$

Daraus ergibt sich sofort:

$$\{y \in \mathbb{R}^2 \mid x \perp y\} = \langle (2,-1) \rangle = \{c \cdot (2,-1) \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, daß auf der Menge $\mathrm{Mat}_n(R)$ die Konjugation von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist:

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \quad \text{Es existiert ein } C \in \mathrm{GL}_n(R) \text{ mit } B = CAC^{-1}.$$

ii.) (2P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

$$A \text{ ist invertierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \text{ ist eine Einheit von } R.$$

iii.) (2P) Sei $\big(V, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Beweisen Sie folgende Implikation:

$$v \perp w \quad \Longrightarrow \quad v, w \text{ sind linear unabhängig.}$$

iv.) (2P) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine diagonalisierbare Matrix mit $A^3 = E_n$. Beweisen Sie, daß dann schon $A = E_n$ folgt.

Lösung:

i.) Reflexivität: Es gilt $A \sim A$ für alle $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$ mit $A = E_n A E_n^{-1}$.
Symmetrie: Aus $A \sim B$ folgt, daß es ein $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ gibt mit $B = CAC^{-1}$ und dies liefert $A = C^{-1}BC$ und damit $B \sim A$.
Transitivität: Es gelte $A_1 \sim A_2$ und $A_2 \sim A_3$. Dann existieren nach Definition $C, D \in \mathrm{GL}_n(R)$ mit $A_2 = CA_1C^{-1}$ und $A_3 = DA_2D^{-1}$. Es folgt $A_3 = (DC)A_1(DC)^{-1}$ und somit $A_1 \sim A_3$.

ii.) Ist A invertierbar so gilt:

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(E_n) = 1 \implies \det(A) \in R^*.$$

Umgekehrt sei $\det(A)$ eine Einheit in R. Dann folgt die Invertierbarkeit von A aus der Cramerschen Regel:

$$A^{ad}\cdot A = A\cdot A^{ad} = \det(A)\cdot E_n \implies \big(\det(A)^{-1}\cdot A^{ad}\big)\cdot A = A\cdot\big(\det(A)^{-1}\cdot A^{ad}\big) = E_n.$$

Daraus ergibt sich die Invertierbarkeit von A.

iii.) Es gelte $\alpha \cdot v + \beta \cdot w = 0$ mit reellen Zahlen α, β. Zu zeigen ist $\alpha = \beta = 0$. Es gilt wegen $v \perp w$, d.h. $\langle v, w\rangle = 0$:

$$0 = \langle v, \alpha \cdot v + \beta \cdot w\rangle = \alpha \cdot \langle v, v\rangle + \beta \cdot \langle v, w\rangle = \alpha \cdot \langle v, v\rangle.$$

Wegen $\langle v, v\rangle \neq 0$ (da $v \neq 0$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit) folgt $\alpha = 0$, und damit $\beta \cdot w = 0$. Wegen $w \neq 0$ folgt $\beta = 0$, insgesamt also $\alpha = \beta = 0$.

iv.) Es existiert (da A diagonalisierbar ist) ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $D = S^{-1}AS$, wobei D eine Diagonalmatrix ist:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Da $A^3 = E_n$ gilt, folgt

$$D^3 = (S^{-1}AS)^3 = S^{-1}A^3S = S^{-1}E_nS = E_n.$$

Andererseits gilt:

$$D^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^3 \end{pmatrix},$$

also $\lambda_i^3 = 1$ für alle $i = 1, ..., n$. Dann folgt $\lambda_i = 1$ für alle $i = 1, ..., n$ und somit $D = E_n$, womit sich letztendlich ergibt:

$$A = SDS^{-1} = SE_nS^{-1} = E_n.$$