Klausur zur Linearen Algebra IIa HWS 2013, 20.04.2013
Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$.
Definieren Sie $\det(A)$.

ii.) (1P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, und seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$.
Formulieren Sie dafür den Determinantenmultiplikationssatz.

iii.) (1P) Sei $\big(V, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum.
Formulieren Sie darin die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

iv.) (2P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Definieren Sie die Begriffe Eigenwert und Eigenraum von φ.

v.) (1P) Sei $\big(V, \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum.
Definieren Sie darin eine Orthonormalbasis.

vi.) (1P) Sei V ein K-Vektorraum. Definieren Sie den Dualraum V^* von V.

vii.) (1P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$.
Definieren Sie das charakteristische Polynom χ_A von A.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Berechnen Sie $\det(A)$ für die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii.) (1P) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Geben Sie die folgende Matrix an:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{ad}.$$

iii.) (1P) Berechnen Sie die folgende reelle Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1}.$$

iv.) (4P) Geben Sie alle Elemente der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ an und entscheiden Sie (mit Begründung), ob diese Gruppe zu S_3 oder zu $\mathbb{Z}_6$ isomorph ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Geben Sie (mit Begründung) eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ an, so daß A keinen Eigenwert hat.

ii.) (1P) Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ diagonalisierbar mit den Eigenwerten:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = 2\lambda_3 = 1.$$

Bestimmen Sie χ_A.

iii.) (2P) Begründen Sie, warum je zwei der folgenden Matrizen aus $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ *nicht* zueinander konjugiert sind:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

iv.) (4P) Bestimmen Sie zu der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ ein $S \in GL_3(\mathbb{R})$, so daß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (4P) Betrachten Sie den folgenden Untervektorraum V von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$:

$$V := \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Es wird wie folgt ein Endomorphismus von V definiert:

$$\psi \colon V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $[\psi]_{B,B}$ für die folgende Basis B von V:

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

ii.) (4P) Gegeben sei die lineare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[2]}$, deren darstellende Matrix bzgl. der Standardbasen des $\mathbb{R}^{[3]}$ und des $\mathbb{R}^{[2]}$ wie folgt aussieht:

$$[\varphi]_{\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[\varphi]_{C,B}$ für die folgenden Basen C von $\mathbb{R}^{[2]}$ und B von $\mathbb{R}^{[3]}$:

$$C := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right), \quad B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Im $\mathbb{R}^2$ sei folgendes Skalarprodukt gegeben:

$$\langle x, y \rangle := 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Bestimmen Sie dazu für die Vektoren $x := (1,1)$, $y := (-1,1)$ die Werte von $\|x\|$ und $d(x,y)$, und prüfen Sie ob $x \perp y$ gilt.

ii.) (3P) Orthogonalisieren Sie die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^{[3]}$ bzgl. des Standardskalarprodukts mit dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

iii.) (3P) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

iv.) (1P) Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt versehen.
Geben Sie zu $x := (1,2) \in \mathbb{R}^2$ alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^2$ an, für die gilt: $x \perp y$.

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, daß auf der Menge $\mathrm{Mat}_n(R)$ die Konjugation von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist:

$$A \sim B :\Longleftrightarrow \quad \text{Es existiert ein } C \in \mathrm{GL}_n(R) \text{ mit } B = CAC^{-1}.$$

ii.) (2P) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}_n(R)$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

$$A \text{ ist invertierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \text{ ist eine Einheit von } R.$$

iii.) (2P) Sei $\big(V, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum und seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Beweisen Sie folgende Implikation:

$$v \perp w \quad \Longrightarrow \quad v, w \text{ sind linear unabhängig.}$$

iv.) (2P) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine diagonalisierbare Matrix mit $A^3 = E_n$. Beweisen Sie, daß dann schon $A = E_n$ folgt.

Matrikelnummer: