Aufgabe 1

a) $R = \{(a,a) \mid a \in A\} \cup \{(1,4),(4,1),$
$(3,4),(4,3),(3,8),(8,3),(5,8),(8,5),$
$(4,8),(8,4),(3,5),(5,3),(1,3),(3,1),$
$(1,8),(8,1),(1,5),(5,1),(4,5),(5,4),$
$(2,6),(6,2),(6,9),(9,6),(2,9),(9,2)\}$

Äquivalenzklassen:
$[1] = \{1,3,4,5,8\}$
$[2] = \{2,6,9\}$
$[7] = \{7\}$

b) $a \sim b \; :=$ $a - b$ ist gerade
$[1] = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ ungerade$\}$
$[2] = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ gerade$\}$

c) i) reflexiv, symmetrisch, transitiv
sind leicht zu prüfen
Vollständiges Repräsentantensystem:
$[0,1[\; = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$

Denn $\forall y \in \mathbb{R} \; \exists x \in [0,1[, n \in \mathbb{Z}: y = n + x$

ii) Nicht transitiv, da z.B. $2 \sim 3, 3 \sim 4$,
aber $4 \nsim 2$

Aufgabe 2

a) $\sigma = (1\ 3\ 5\ 8\ 7)(2\ 10\ 9)(4\ 6)$

$\sigma^2 = (1\ 5\ 7\ 3\ 8)(2\ 9\ 10)$

$\operatorname{ord}(\sigma) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$\Rightarrow \sigma^{30} = id \Rightarrow \sigma^{3000} = id \Rightarrow \sigma^{3002} = \sigma^2$

b) $U = \{ id, (1\ 4)(2\ 3\ 5), (2\ 5\ 3), (1\ 4),$
$(2\ 3\ 5), (1\ 4)(2\ 5\ 3) \}$

$\pi \in U$, $\operatorname{sign}(\pi) = -1$, wenn $(1\ 4)$ vorkommt
$\operatorname{sign}(\pi) = 1$ sonst

U kein Normalteiler von S_5, da

$(1\ 2)\underbrace{(1\ 4)}_{\in U}(1\ 2)^{-1} = (2\ 4) \notin U$

Aufgabe 3

a) $1001 = 10 \cdot 99 + 11$

$-999 = (-10) \cdot 102 + 21$

b) $n = 7: \quad b = 3$

$n = 11: \quad b = 0$

c) $U = \{ [0]_{12}, [4]_{12}, [8]_{12} \}$

$|\mathbb{Z}_{12} / U| = 12 : 3 = 4$

$\mathbb{Z}_{12} / U = \{ U, [1]_{12} + U, [2]_{12} + U, [3]_{12} + U \}$

d) $\mathbb{Z}_{24}^{*} = \{ [1]_{24}, [5]_{24}, [7]_{24}, [11]_{24}, [13]_{24}, [17]_{24}, [19]_{24}, [23]_{24} \}$

Aufgabe 4

a) i) $\Rightarrow$ (ii): $f \circ g = f \circ h$, $x \in C$

$$\Rightarrow f(g(x)) = f(h(x))$$

$$\underset{f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} g(x) = h(x) \text{ für alle } x \in C$$

$$\Rightarrow g = h$$

ii) $\Rightarrow$ i): Wähle $C = \{a, b\}$ wobei $a, b \in A$, $a \neq b$ beliebig gegeben sind

$$g : C \longrightarrow A \quad \begin{matrix} a \longmapsto a \\ b \longmapsto a \end{matrix}$$

$$h : C \longrightarrow A \quad \begin{matrix} a \longmapsto a \\ b \longmapsto b \end{matrix}$$

$$g \neq h \underset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} f \circ g \neq f \circ h$$

Da $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(a)$

und $(f \circ h)(a) = f(h(a)) = f(a)$

muss wegen $f \circ g \neq f \circ h$ gelten

$$(f \circ g)(b) \neq (f \circ h)(b)$$

$$\Rightarrow f(a) \neq f(b) \quad \text{für } a \neq b$$

$$\Rightarrow f \text{ injektiv}$$

Aufgabe 4

b) f_1 nicht injektiv: $f(1,6) = f(2,3)$

f_1 surjektiv: $f(1,y) = y$

f_2 nicht injektiv: wie bei f_1

f_2 nicht surjektiv: $f(x,y) \neq 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{N}^2$

f_3 injektiv: $f(x) = f(y)$

$$\Rightarrow (x^2, 3x+2) = (y^2, 3y+2)$$

$$\Rightarrow 3x+2 = 3y+2$$

$$\Rightarrow x = y$$

f_3 nicht surjektiv: $(0,0) \notin \mathrm{im}(f_3)$

f_4 bijektiv: $g(x,y) := (\sqrt[3]{y}, \sqrt[3]{x})$
definiert die Umkehrabbildung zu f_4

c) $\varphi: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_8$ Gruppenhomom.

$\Rightarrow |\mathbb{Z}_{12}| = |\ker(\varphi)| \cdot |\mathrm{im}(\varphi)|$

Da 8 nicht 12 teilt, kann φ nicht surjektiv sein.

$\psi: \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{12}$ Gruppenhomom.

$\mathrm{im}(\psi)$ Untergruppe von $\mathbb{Z}_{12}$

$\Rightarrow |\mathrm{im}(\psi)|$ teilt 12 $\Rightarrow |\mathrm{im}(\psi)| \neq 8 \Rightarrow$ ψ nicht injektiv

Aufgabe 5

a)

Vektor aus $P(\{1,2,3\})$	Koordinaten bzgl. B
$\emptyset$	$([0]_2, [0]_2, [0]_2)$
$\{1\}$	$([1]_2, [1]_2, [1]_2)$
$\{2\}$	$([0]_2, [1]_2, [1]_2)$
$\{3\}$	$([0]_2, [0]_2, [1]_2)$
$\{1,2\}$	$([1]_2, [0]_2, [0]_2)$
$\{1,3\}$	$([1]_2, [1]_2, [0]_2)$
$\{2,3\}$	$([0]_2, [1]_2, [0]_2)$
$\{1,2,3\}$	$([1]_2, [0]_2, [1]_2)$

b) i) Ist ein UVR als Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 + x_3, \; x_1 + 2x_3 - x_4)$$

ii) Ist kein UVR, da er $(2,1,3,6)$ und $(1,1,1,1)$ enthält, aber nicht deren Summe $(3,2,4,7)$

zu i) Basis mit z.B.

$$((1,0,-1,-1), (0,1,0,0))$$

Aufgabe 5

c) Es gibt, da $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^{[2]}$ ist, genau eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^{[2]} \to \mathbb{R}^{[3]}$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Wegen $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ gilt

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

Somit gibt es nur für $b = 3$ eine lineare Abbildung der gesuchten Art.

Aufgabe 6

a) $(1,0) \xmapsto{f} (1,1,1)$
$(0,1) \xmapsto{f} (1,0,0)$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear

f wird injektiv, da $((1,1,1),(1,0,0))$ l.u.

Es gilt $f(x,y) = (x+y, x, x)$

b) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear mit
$(1,2,3) \longmapsto (0,0)$
$(1,0,0) \longmapsto (1,0)$
$(0,1,0) \longmapsto (0,1)$

f wird surjektiv, da $((1,0),(0,1),(0,0))$ ein EZS von $\mathbb{R}^2$ ist

Berechnung von $f(x,y,z)$:

$$(0,0,1) = \frac{1}{3}\big((1,2,3) - (1,0,0) - 2(0,1,0)\big)$$

$$\Rightarrow f(0,0,1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = x(1,0) + y(0,1) - z\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(x - \frac{1}{3}z, y - \frac{2}{3}z\right)$$

c) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear mit
$(1,2) \longmapsto (1,0)$
$(1,0) \longmapsto (0,1)$

f wird bijektiv, da $((1,0),(0,1))$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

$$(0,1) = \frac{1}{2}\big((1,2) - (1,0)\big)$$

$$\Rightarrow f((0,1)) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \left(\frac{1}{2}y, x - \frac{1}{2}y\right)$$

d) $f: \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^9$, $f(x_1, \dots, x_9) := (x_2, 0, \dots, 0)$

Aufgabe 7

a) Man bildet

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeilenumformungen:

$$[\varphi] \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis von Kern(φ):

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^5) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(\varphi))$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(\varphi)) = 2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ Basis von } \operatorname{im}(\varphi)$$

Aufgabe 7

b) $\varphi : \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^8}_{=8} = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi))$$

φ surjektiv $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi)) = 3$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) = 5$

φ nicht surjektiv $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi)) \leq 2$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) \geq 6$

c) $\varphi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^8$ linear

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^5)}_{=5} = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi))$$

φ injektiv $\Rightarrow \ker(\varphi) = \{0\}$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi)) = 5$

φ nicht injektiv $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) \geq 1$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi)) \leq 4$

Aufgabe 8

a) $AC = \begin{pmatrix} -13 & -20 & 17 \end{pmatrix}$

$$= 4\begin{pmatrix} 2 & -8 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} -24 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Matrix aufstellen und umformen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 10 & 2 & 30 & 44 & 58 \\ 2 & 4 & 1 & 13 & 19 & 25 \\ 1 & 2 & 1 & 9 & 13 & 17 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & -15 & -21 & -27 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 & 13 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Zeilenstufenform

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Spezielle Zeilenstufenform

Aufgabe 8

b) (Fortsetzung)

Lösungen an der speziellen Zeilenstufenform ablesen:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_3, t_4, t_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Wir schreiben $\bar{a} = [a]_7$ und bilden die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{6} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{6} & \bar{6} & \bar{5} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{5} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{6} & \bar{6} & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{6} & \bar{2} \\ \bar{6} & \bar{4} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{5} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{6} & \bar{6} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{6} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{5} & \bar{5} & \bar{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{6} & \bar{6} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{3} & \bar{6} & \bar{6} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{5} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{6} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array}\right)$$

Hieran erkennt man schon, dass es genau eine Lösung gibt

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} [4]_7 \\ [0]_7 \\ [0]_7 \\ [0]_7 \end{pmatrix} \right\}$$