Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 06.11.2012
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1: Quotientenräume (1+1+1+1 Punkte)

a.) Zeigen Sie, daß die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum ist:

$$U := \{(2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

b.) Geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von U an.

c.) Veranschaulichen Sie die Linksnebenklassen durch eine Zeichnung.

d.) Geben Sie einen Isomorphismus $\mathbb{R}^2/U \longrightarrow \mathbb{R}$ an.

Aufgabe 2: Lineare Abbildungen (2+2 Punkte)

a.) Sei $V := Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear sind:

$$\Phi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f \mapsto (f(0),\, f(1)).$$
$$\Psi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f \mapsto \big(f(0),\, f(0)^2\big).$$

b.) Sei $V := \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen, und es seien folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen gegeben:

$$f_1\colon V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots),$$
$$f_2\colon V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots),$$
$$f_3\colon V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1, 0, 0, \ldots).$$

Berechnen Sie $f_i \circ f_j$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $i \neq j$.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Endomorphismenring (1+1+2 Punkte)
Sei $\varphi \in End_R(V)$ ein Endomorphismus des R-Moduls/Vektorraums V mit $\varphi^2 = \varphi$ und sei $\psi := id_V - \varphi$. Zeigen Sie:
a.) $\psi^2 = \psi$.
b.) $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \bar{0}$.
c.) $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\psi)$ und $\mathrm{im}(\psi) = \ker(\varphi)$.
Bemerkung: $\varphi \in End_R(V)$ mit $\varphi^2 = \varphi$ heißt idempotent.

Aufgabe 4: Exakte Sequenzen (3+1 Punkte)
Eine Sequenz von R-Moduln/Vektorräumen und linearen Abbildungen

$$\ldots \xrightarrow{f_{i-2}} V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} V_{i+2} \xrightarrow{f_{i+2}} \ldots$$

heißt exakt an der Stelle V_i, wenn $\mathrm{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$ gilt. Sie heißt exakt, wenn sie überall exakt ist.

a.) Es sei folgende Sequenz von R-Moduln/Vektorräumen und linearen Abbildungen gegeben:

$$\{0\} \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U \longrightarrow \{0\}.$$

Zeigen Sie:

$$\text{Sequenz exakt} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ ist injektiv, } g \text{ ist surjektiv und } \mathrm{im}(f) = \ker(g).$$

In diesem Fall spricht man von einer kurzen exakten Sequenz.

b.) Zeigen Sie, daß für eine injektive lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ die folgende Sequenz exakt ist:

$$\{0\} \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\pi_{\mathrm{im}(f)}} W/\,\mathrm{im}(f) \longrightarrow \{0\}.$$

Abgabe am Dienstag, 13.11.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.