Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 23.10.2012

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1: $\mathbb{R}^n$ als Vektorraum (2+2 Punkte)

a.) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß der $\mathbb{R}^n$ mit der folgenden äußeren Verknüpfung ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, indem Sie die Bedingungen V1 bis V4 der skalaren Multiplikation nachprüfen:

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \lambda \bullet (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

b.) Zeigen Sie, daß die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum ist:

$$U := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

Aufgabe 2: Vektorräume und Moduln (2+2 Punkte)

a.) Sei M eine nicht-leere Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. $\mathbb{Z}_2$ ist nach 1.3.34. ein Körper und nach Aufgabe 4 von Blatt 3 ist $\big(\mathcal{P}(M), \ominus\big)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, daß $\mathcal{P}(M)$ mit der folgenden äußeren Verknüpfung ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum ist, indem Sie die Bedingungen V1 bis V4 der skalaren Multiplikation nachprüfen:

$$\bullet : \mathbb{Z}_2 \times \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M) \quad \text{mit} \quad [a]_2 \bullet A := \begin{cases} \emptyset & \text{für} \quad [a]_2 = [0]_2\,, \\ A & \text{für} \quad [a]_2 = [1]_2\,. \end{cases}$$

b.) Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß $(\mathbb{Z}_n)^k$ mit der folgenden äußeren Verknüpfung ein $\mathbb{Z}$-Modul ist, indem Sie die Bedingungen V1 bis V4 der skalaren Multiplikation nachprüfen:

$$\bullet : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}_n)^k \longrightarrow (\mathbb{Z}_n)^k \quad \text{mit} \quad z \bullet ([a_1]_n, \ldots, [a_k]_n) := ([za_1]_n, \ldots, [za_k]_n).$$

Bitte wenden

Aufgabe 3: Homomorphiesatz und Fasern(1+1+1+1 Punkte)
Bestimmen Sie die Fasern der folgenden Gruppenhomomorphismen mit Hilfe des Homomorphiesatzes Version II:

$$\begin{array}{llll} f_1\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{mit} & (x,y) & \mapsto \; x+y. \\ f_2\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & (x,y,z,w) & \mapsto \; (x-y, z-w). \\ f_3\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & (x,y) & \mapsto \; (x,x). \\ f_4\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & (x,y,z) & \mapsto \; (x,z). \end{array}$$

Aufgabe 4: Abelsche Gruppe als $\mathbb{Z}$-Modul (1+3 Punkte)

a.) Sei $(G,*)$ eine abelsche Gruppe. Dann ist $(End(G), \circledast, \circ)$ nach Beispiel 1.3.3. ein Ring mit Eins. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei ρ_n der in 1.2.40.v.) definierte Gruppenhomomorphismus $\rho_n\colon G \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad g \mapsto g^n$. Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung ein Ringhomomorphismus ist:

$$\psi_G\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{End}(G) \quad \text{mit} \quad n \mapsto \rho_n.$$

In Aufgabe 4 von Blatt 6 wurde gezeigt, daß die Abbildung ψ_G ein Gruppenhomomorphismus ist, also braucht nur noch die Strukturverträglichkeit von ψ_G bzgl. der multiplikativen Verknüpfungen in beiden Ringen gezeigt zu werden.

b.) Durch obigen Ringhomomorphismus ψ_G ist eine äußere Verknüpfung definiert:

$$\bullet\colon \mathbb{Z} \times G \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad n \bullet g := \psi_G(n)(g).$$

Zeigen Sie, daß die Bedingungen V1 bis V4 der skalaren Multiplikation erfüllt sind. Bestimmen Sie außerdem diese äußere Verknüpfung explizit für die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}^2$, d.h. geben Sie $k \bullet (a,b)$ an für $k \in \mathbb{Z}$ und $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

Abgabe am Dienstag, 30.10.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.