Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 16.10.2012
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1: Homomorphismen und Restklassengruppen (2+1+1 Punkte)

a.) Zeigen Sie, daß es zwischen den folgenden Restklassengruppen genau dann einen Gruppenhomomorphismus der Form

$$\varphi_{n,m}\colon \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_m \quad \text{mit} \quad [a]_n \mapsto [a]_m$$

gibt, wenn m ein Teiler von n ist. Bestimmen Sie in diesem Fall den $\ker(\varphi_{n,m})$.

b.) Bestimmen Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus von der Restklassengruppe $\mathbb{Z}_{12}$ in die Restklassengruppe $\mathbb{Z}_{24}$ und geben Sie dessen Bild an.

c.) Bestimmen Sie einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von der Restklassengruppe $\mathbb{Z}_{36}$ auf die Restklassengruppe $\mathbb{Z}_9$ und geben Sie alle seine Fasern an.

Aufgabe 2: Restklassenringe (1+1+1+1 Punkte)

a.) Stellen Sie für die Restklassenringe $\mathbb{Z}_4$ und $\mathbb{Z}_5$ die multiplikativen Verknüpfungstafeln auf.

b.) Zeigen Sie für ein Element a des Restklassenrings $\mathbb{Z}_n$ die folgende Äquivalenz:

$$a \text{ ist eine Einheit im Ring } \mathbb{Z}_n \quad \Longleftrightarrow \quad \langle\, a \,\rangle = \mathbb{Z}_n.$$

c.) Bestimmen Sie die Elemente der Einheitengruppe $\mathbb{Z}_n^*$ des Ringes $\mathbb{Z}_n$ für $n = 15$ und $n = 16$.

d.) Zeigen Sie, daß im Restklassenring $\mathbb{Z}_n$ jedes Element ungleich Null entweder ein Nullteiler oder eine Einheit ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Linksmultiplikation in Ringen (1+2+1 Punkte)

a.) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $a \in R$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, daß dann für die Linksmultiplikation λ_a gilt:

$$a \text{ ist kein Nullteiler} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_a \text{ injektiv.}$$

b.) Sei $(R, +, \cdot)$ nun ein kommutativer Ring mit Eins und $a \in R$. Zeigen Sie für die Linksmultiplikation λ_a die Äquivalenz:

$$a \text{ ist eine Einheit} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_a \text{ bijektiv.}$$

c.) Bestimmen Sie den Kern der Linksmultiplikation $\lambda_a \colon \mathbb{Z}_{24} \longrightarrow \mathbb{Z}_{24}$ mit $a \in \{\, [8]_{24}, [18_{24}] \,\}$, d.h.

$$\lambda_a \colon \mathbb{Z}_{24} \longrightarrow \mathbb{Z}_{24} \quad \text{mit} \quad [b]_{24} \mapsto [8b]_{24} \quad \text{bzw.} \quad [b]_{24} \mapsto [18b]_{24}.$$

Aufgabe 4: Endliche Körper (1+1+1+1 Punkte)

a.) Nach der Vorlesung ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p ein Körper. Damit sind Elemente aus $\mathbb{Z}_p \setminus \{[0]_p\}$ in diesem Fall immer invertierbar. Geben Sie für die folgenden Körper zu jedem Element ungleich Null sein Inverses an:

$$\mathbb{Z}_7 \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}_{11} \; .$$

b.) Sei $K := \mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung in K:

$$\alpha + \alpha = -1_K \; .$$

c.) Bestimmen Sie für $K := \mathbb{Z}_{13}$ ein $x \in K$ mit $x^2 = -1_K$.

d.) Sei p eine Primzahl ungleich 2 und $K := \mathbb{Z}_p$. Zeigen Sie daß es in K^* genau $\frac{p-1}{2}$ Elemente y gibt, die eine Quadratwurzel in K^* besitzen, zu denen es also ein $x \in K^*$ mit $x^2 = y$ gibt.

Abgabe am Dienstag, 23.10.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.