Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 09.10.2012

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1: Signum einer Permutation (1+1+2 Punkte)

a.) Berechnen Sie $\operatorname{sign}(\sigma)$ für alle $\sigma \in S_3$ mit Hilfe der Definition/Produktformel aus Lemma 1.2.45. Berechnen Sie weiter $\operatorname{sign}(\sigma)$ für alle $\sigma \in S_4$. Dabei darf das Lemma 1.2.46 benutzt werden.

b.) Zeigen Sie, daß $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sign}(\sigma) = 1\}$ eine Untergruppe von S_n der Ordnung $\frac{|S_n|}{2}$ ist. (Bemerkung: A_n ist sogar ein Normalteiler von S_n.)

c.) Für $n \in \{2, 3\}$ und folgende quadratischen Zahlentafeln

$$A_2 := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

seien definiert:

$$D_2(A_2) := \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)}, \quad D_3(A_3) := \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)}.$$

Berechnen Sie $D_2(A_2)$ und $D_3(A_3)$ für folgende Zahlentafeln:

$$A_2 \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad A_3 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \pi & -\frac{3}{9} \\ 0 & -1 & \frac{12}{129} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2: Homomorphismen (1+1+1+1 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es Homomorphismen der folgenden Art gibt:

a.) einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}_7 \longrightarrow S_3$.
(Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon G \longrightarrow H$ wird als trivial bezeichnet, falls $\varphi(g) = e_H$ für alle $g \in G$ gilt, vgl. 1.2.49.)

b.) einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $S_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$.

Zeigen Sie, daß die folgenden Gruppen jeweils nicht isomorph zueinander sind. Es genügt dabei, eine strukturelle Eigenschaft zu finden, die eine der Gruppen besitzt, die jeweils andere aber nicht:

c.) S_3 und $\mathbb{Z}_6$.

d.) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_4$.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Kerne von Homomorphismen (1+1+2 Punkte)

a.) Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist und bestimmen Sie ihren Kern:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x, y) \mapsto 3x - 2y.$$

b.) Für eine Gruppe $(G, *)$ wird das Zentrum $Z(G)$ definiert wie folgt:

$$Z(G) := \{ g \in G \mid g * h = h * g \text{ für alle } h \in G \}.$$

Zeigen Sie, daß $Z(G)$ der Kern des folgenden Gruppenhomomorphismus aus Aufgabe 4.b.) von Blatt 5 ist:

$$\Phi_G \colon G \longrightarrow S(G) \quad \text{mit} \quad g \mapsto \kappa_g$$

Dabei ist κ_g der folgende Gruppenautomorphismus (Konjugation mit g):

$$\kappa_g \colon G \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad x \mapsto g * x * g^{-1}.$$

c.) Man bestimme $Z(D_4)$, wobei D_4 die Diedergruppe aus Aufgabe 1, Blatt 5, ist.

Aufgabe 4: Gruppenoperation III (2+1+1 Punkte)

a.) Sei G eine Gruppe, die auf der nicht-leeren Menge M operiert via dem Gruppenhomomorphismus $\Psi \colon G \longrightarrow S(M)$. Zeigen Sie, daß auf M die folgende Definition eine Äquivalenzrelation liefert (siehe auch 1.2.42):

$$y \sim x \quad := \quad \exists g \in G : y = \Psi(g)(x).$$

b.) Sei G eine abelsche Gruppe. Für $n \in \mathbb{Z}$ sei ρ_n der in 1.2.40.v.) definierte Gruppenhomomorphismus $\rho_n \colon G \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad g \mapsto g^n$. Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\psi_G \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{End}(G) \quad \text{mit} \quad n \mapsto \rho_n.$$

c.) Geben Sie im Fall $G = \mathbb{Z}_4$ in Teil b) alle Elemente von $\mathrm{End}(G)$ explizit an und bestimmen Sie $\ker(\psi_G)$.

Abgabe am Dienstag, 16.10.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.