Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 02.10.2012
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1: Linksnebenklassen (2+1+1 Punkte)

a.) Die Diedergruppe D_4 ist eine Untergruppe von S_4:

$$D_4 := \{\mathrm{id}, (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2)(3\,4), (1\,3), (2\,4)\}.$$

Geben Sie die Mächtigkeit der Menge S_4/D_4 und alle ihre Elemente an.

b.) Im folgenden sollen in verschiedenen Restklassengruppen $(\mathbb{Z}_n, +)$ Verknüpfungen durchgeführt werden und das jeweilige Ergebnis in der Form $[b]_n$ mit einem Repräsentanten $0 \le b \le n-1$ angegeben werden:

$$[1000]_7 + [-107]_7 \quad \text{und} \quad [-22]_{23} + [9999]_{23}.$$

c.) Geben Sie alle Untergruppen der Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ an.

Aufgabe 2: Quotientengruppen (1+1+1+1 Punkte)

a.) Die Kleinsche Vierergruppe (vgl. Aufgabe 3b), Blatt 3) ist gegeben durch:

$$V_4 := \{\mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\} \subseteq S_4.$$

Zeigen Sie, daß V_4 ein Normalteiler von S_4 ist (siehe auch Blatt 4, Aufgabe 4a).

b.) Geben Sie alle Elemente der Quotientengruppe S_4/V_4 an.

c.) Stellen Sie eine Gruppentafel der Quotientengruppe S_4/V_4 auf. Wählen Sie dazu für jede Linksnebenklasse aus S_4/V_4 einen Repräsentanten g und notieren Sie die jeweilige Klasse dann in der Form $g * V_4$. In der Gruppentafel sollen dann nur die einmal gewählten Darstellungen auftreten.
(Bei der Auswahl geschickter Repräsentanten entsteht so eine Gruppentafel, die einer vorher schon betrachteten sehr ähnelt.)

d.) Zeigen Sie daß die folgende Teilmenge von S_4 eine Untergruppe ist, aber kein Normalteiler:

$$\langle (1\,2\,3\,4) \rangle := \{\mathrm{id},\ (1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4\,3\,2)\} \subseteq S_4.$$

Bitte wenden

Aufgabe 3: Gruppenoperation I (2+2 Punkte)

a.) Sei $(G,*)$ eine Gruppe. Für alle $g \in G$ ist die die Linksmultiplikation mit g eine Bijektion (vgl. 1.2.5/1.2.6):

$$\ell_g \colon G \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad h \mapsto g * h.$$

Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung ein Gruppenmonomorphismus (d.h. ein injektiver Gruppenhomomorphismus) ist:

$$\Psi_G \colon G \longrightarrow S(G) \quad \text{mit} \quad g \mapsto \ell_g.$$

b.) Es sei nun die Permutationsdarstellung Ψ_G einer Gruppe G durch Linksmultiplikation im Fall von $G := S_3$ näher betrachtet. Dazu sei willkürlich eine Numerierung der Elemente der S_3 festgelegt:

$$\sigma_1 := \mathrm{id}, \quad \sigma_2 := (1\,2), \quad \sigma_3 := (1\,3), \quad \sigma_4 := (2\,3), \quad \sigma_5 := (1\,2\,3), \quad \sigma_6 := (1\,3\,2).$$

Für $\sigma \in S_3$ ist $\ell_\sigma = \Psi_{S_3}(\sigma)$ eine Permutation der Menge $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_6\}$ und liefert in folgender Weise eine Permutation $\pi_\sigma \in S_6$ der Indexmenge $\{1, \ldots, 6\}$:

$$\ell_\sigma(\sigma_i) = \sigma_j \quad \Longrightarrow \quad \pi_\sigma(i) := j.$$

Geben Sie die Permutationen $\pi_{\sigma_1}, \ldots, \pi_{\sigma_6} \in S_6$ an.

Bemerkung zu Aufgabe 3.):
Es ergibt sich zusammengefaßt eine Einbettung:

$$S_3 \xrightarrow{\Psi_{S_3}} S(S_3) \xrightarrow{\ell_\sigma \mapsto \pi_\sigma} S_6.$$

Aufgabe 4: Gruppenoperation II (2+2 Punkte)

a.) Sei $(G,*)$ eine Gruppe und $g \in G$. Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung ein Gruppenautomorphismus von G (d.h. ein bijektiver Gruppenhomomorphismus von G auf sich selbst) ist:

$$\kappa_g \colon G \longrightarrow G \quad \text{mit} \quad x \mapsto g * x * g^{-1}$$

b.) Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung ein Gruppenhomomorphismus ist:

$$\Phi_G \colon G \longrightarrow S(G) \quad \text{mit} \quad g \mapsto \kappa_g$$

Bemerkungen zu Aufgabe 4.):

i.) Da alle κ_g und damit alle $\Phi_G(g)$ nicht nur Permutationen von G, sondern sogar Gruppenautomorphismen von G sind, gilt $\mathrm{im}(\Phi_G) \subseteq \mathrm{Aut}(G) \subseteq S(G)$.

ii.) Ist G eine abelsche Gruppe so gilt $\kappa_g(x) = x$ für alle $x \in G$ und somit ist in diesem Fall $\Phi_G(g) = \kappa_g = \mathrm{id}_G$ für alle $g \in G$.
Für eine abelsche Gruppe bildet also Φ_G alle $g \in G$ auf das neutrale Element id_G von $S(G)$ ab und ist insbesondere für $|G| > 1$ nicht injektiv. Die Permutationsdarstellung Ψ_G von G aus Aufgabe 3.) via Linksmultiplikation ist immer injektiv.

Abgabe am Dienstag, 09.10.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.