Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 25.09.2012
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1: Strukturen auf $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (2+1+1 Punkte)
Wie in 1.1.37 definiert und in 1.1.38 diskutiert existieren auf $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die drei natürlichen Verknüpfungen „ $\circ$ “, „ $\oplus$ “ und „ $\odot$ “.

a.) Zeigen Sie, daß für ein $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt:

$$f \text{ ist invertierbar bzgl. „} \circ \text{“} \implies f \text{ ist nicht invertierbar bzgl. „} \odot \text{“}.$$

b.) Bestimmen Sie die folgenden Abbildungen und fertigen Sie eine Skizze an:

$$f := \text{id}_\mathbb{R} \odot \text{id}_\mathbb{R} \quad \text{und} \quad g := \text{id}_\mathbb{R} \oplus \text{id}_\mathbb{R}\,.$$

c.) Sei g die Inverse von $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzgl. der Verknüpfung „$\oplus$“. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\text{graph}(g)$ und $\text{graph}(f)$?

Aufgabe 2: Gruppenstruktur von S_n (1+1+2 Punkte)

a.) Bestimmen Sie für $\sigma := (2\,3\,4\,6\,7)(5\,9) \in S_9$ die von σ erzeugte zyklische Untergruppe $\langle\, \sigma \,\rangle$.

b.) Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Weiter seien $g \in G$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$g^k = e \quad \implies \quad \text{ord}(g) \text{ ist ein Teiler von } k.$$

c.) Sei $\sigma \in S_n$ eine zyklische Permutation mit Zykeldarstellung $(a_1 \, \ldots \, a_k)$. Bestimmen Sie die Ordnung von σ.
Sei nun $\pi := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r \in S_n$ ein Produkt von zyklischen Permutationen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ mit disjunkten Trägern. Zeigen Sie, daß die Ordnung von π das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen von $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ ist.

Aufgabe 3: Untergruppen (1+1+2 Punkte)

a.) Wenden Sie Beispiel 1.2.4.ii) auf den Fall $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I := \{2, 3\}$ an, d.h. bestimmen Sie die folgende Untergruppe von S_5:

$$U_I := \{\, \sigma \in S_5 \mid \sigma_{|I} = \text{id}_I \,\}$$

b.) Sei G eine Gruppe, und seien $U, H \subseteq G$ Untergruppen. Zeigen Sie, daß $U \cap H$ auch eine Untergruppe von G ist.

c.) Finden sie alle Untergruppen der S_3

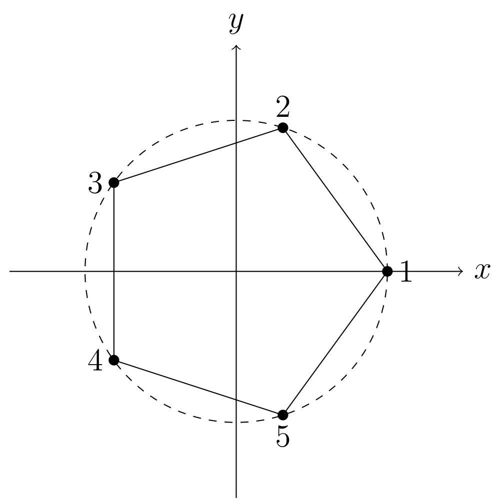
Bitte wenden

Aufgabe 4: S_n und D_5 (2+2 Punkte)

a.) Sei $\sigma \in S_n$ eine zyklische Permutation mit Zykeldarstellung $(a_1\ \dots\ a_k)$. Zeigen Sie, daß für jedes $\pi \in S_n$ gilt:

$$\pi \circ \sigma \circ \pi^{-1} \quad \text{hat die Zykeldarstellung} \quad \big(\pi(a_1)\ \dots\ \pi(a_k)\big).$$

b.) In folgender Skizze ist ein reguläres Fünfeck eingezeichnet:



Die Diedergruppe $D_5 \subseteq S_5$ mit $|D_5| = 10$ ist eine Untergruppe von S_5, welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} D_5 := \big\{ &\mathrm{id}, (1\,2\,3\,4\,5), (1\,3\,5\,2\,4), (1\,4\,2\,5\,3), (1\,5\,4\,3\,2), \\ &(1\,3)(5\,4), (2\,4)(1\,5), (2\,5)(3\,4), (1\,4)(2\,3), (3\,5)(1\,2) \big\} \end{aligned}$$

Interpretieren Sie die Elemente der D_5 als Drehungen um den Ursprung bzw. als Spiegelungen an Ursprungsgeraden. Mittelpunkte der Fünfeckskanten können dabei wie folgt bezeichnet werden: M_{12} sei der Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten 1 und 2.

Abgabe am Dienstag, 02.10.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.