Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 18.09.2012

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1: Permutationen (2+2 Punkte)

a.) Schreiben Sie die durch die folgenden Darstellungen gegebenen Permutationen als Produkte von zyklischen Permutationen mit disjunkten Trägern:

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 6 & 11 & 8 & 12 & 2 & 4 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 15 & 7 & 2 & 5 & 4 & 1 & 12 & 6 & 14 & 3 & 8 & 9 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie zudem noch die Kompositionen $\sigma_1 \circ \sigma_2$ und $\sigma_2 \circ \sigma_1$.

b.) Geben Sie Elemente $\sigma_1, \sigma_2 \in S_5$ an, für die gilt:

i.) σ_1, σ_2 sind zyklisch und $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ist zyklisch.
ii.) σ_1, σ_2 sind zyklisch und $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ist nicht-zyklisch.
iii.) σ_1, σ_2 sind nicht-zyklisch und $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ist zyklisch.
iv.) σ_1, σ_2 sind nicht-zyklisch und $\sigma_1 \circ \sigma_2$ ist nicht-zyklisch.

Aufgabe 2: Algebraische Strukturen (1+1+1+1 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden algebraischen Strukturen auf Assoziativität, Kommutativität sowie die Existenz neutraler und inverser Elemente:

a.) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \div)$ (Division von Brüchen – ohne die Null).
b.) $(\mathcal{P}(M), \cap)$ mit einer nicht-leeren Menge M.
c.) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, *)$ mit $(a, b) * (c, d) := (ac, b + d)$.
d.) $(\mathbb{Z}, *)$ mit $a * b := a^2 + b$.

Aufgabe 3: Gruppen und Untergruppen (2+2 Punkte)

a.) Geben Sie die Gruppentafel der S_3 unter Verwendung von Zykeldarstellungen an, d.h. füllen Sie die folgende Tabelle aus:

$\circ$	id	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,3)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
id						
$(1\,2)$			$(*)$			
$(1\,3)$						
$(2\,3)$						
$(1\,2\,3)$						
$(1\,3\,2)$						

Dabei soll z.B. in der zweiten Zeile und dritten Spalte $(*)$ das Ergebnis von $(12)(13) := (1\,2) \circ (1\,3)$ stehen (siehe auch Blatt 1, Aufgabe 3.c).

Bitte wenden

b.) Die nicht-zyklischen Permutationen in S_4 (Blatt 2, Aufgabe 3.b.), sind gegeben durch:

$$V_4 := \{ \mathrm{id},\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23) \} \subseteq S_4.$$

Diese Menge heißt auch die *Kleinsche Vierergruppe*. Zu zeigen ist nun, daß diese Menge tätsächlich eine Untergruppe der S_4 ist.
Stellen Sie für diese vier Permutationen eine Verknüpfungstafel bzgl. der Verknüpfung „ $\circ$ “ auf und zeigen Sie daran, daß V_4 abgeschlossen ist unter der Verknüpfung, und zu jedem Element ein Inverses existiert (das neutrale Element id ist ja schon in V_4 gegeben). Ist V_4 eine abelsche Gruppe?
Daß die nicht-zyklischen Elemente der S_4 eine Untergruppe bilden, ist ein Kuriosum in der S_4. Wie Aufgabe 1.c.) zeigt, gilt im allgemeinen keineswegs, daß die Menge aller nicht-zyklischen Permutationen bzw. die Menge aller zyklischen Permutationen abgeschlossen ist unter der Komposition.

Aufgabe 4: Symmetrische Differenz (1+1+2 Punkte)
Sei M eine nicht-leere Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ sei wie auf Blatt 1, Aufgabe 3.c.) die symmetrische Differenz definiert durch:

$$A \ominus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

a.) Zeigen Sie für $A, B, C \in \mathcal{P}(M)$ die Gleichung:

$$(A \ominus B) \ominus C = \big(A \setminus (B \cup C)\big) \,\dot{\cup}\, \big(B \setminus (A \cup C)\big) \,\dot{\cup}\, \big(C \setminus (A \cup B)\big) \cup (A \cap B \cap C)$$

b.) Zeigen Sie, daß „ $\ominus$ “ eine assoziative innere Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$ ist (der vorherige Aufgabenteil kann dabei von Nutzen sein). Damit ist $\big(\mathcal{P}(M), \ominus\big)$ eine Halbgruppe.

c.) Zeigen Sie, daß $\big(\mathcal{P}(M), \ominus\big)$ sogar eine abelsche Gruppe ist (das Assoziativgesetz muß natürlich nicht mehr bewiesen werden). Um das neutrale Element der Gruppe und zu jedem Element das Inverse zu finden, kann die Aufgabe von Blatt 1 über den Spezialfall $M := \{1, 2\}$ als Inspiration genutzt werden (dort wurde also die Gruppentafel einer vierelementigen abelschen Gruppe erstellt).

Abgabe am Dienstag, 25.09.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.