

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1: Abbildungen (1+1+2 Punkte)

- a.) Geben Sie eine Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ an, die injektiv, aber nicht surjektiv ist.
b.) Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung bijektiv ist und geben Sie die Umkehrabbildung f^{-1} an:

$$f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

- c.) Zeigen Sie, daß die Umkehrungen der Implikationen von Lemma 0.4.11 im allgemeinen nicht gelten. Geben Sie dazu Abbildungen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$, so daß gilt:
i.) $g \circ f$ ist injektiv, aber nicht f und g beide injektiv.
ii.) $g \circ f$ ist surjektiv, aber nicht f und g beide surjektiv.

Aufgabe 2: Graphen (2+1+1 Punkte)

Gegeben sei eine bijektive Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wie in der Vorlesung (Satz 0.4.15) gezeigt wurde, besitzt f dann eine Umkehrabbildung $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a.) Zeigen Sie:

$$\text{graph}(f^{-1}) = \{ (f(x), x) \mid x \in \mathbb{R} \}.$$

- b.) Geben Sie eine geometrische Interpretation des Zusammenhang der Graphen von f und f^{-1} .
c.) Skizzieren Sie den Graphen von $f(x) := \sqrt[3]{x}$.

Aufgabe 3: Zyklische Permutationen (2+2 Punkte)

Für die Symmetrische Gruppe S_n gilt $|S_n| = n!$ mit $n! := 1 \cdot 2 \cdots n$, und damit insbesondere $|S_3| = 6$ und $|S_4| = 24$.

- a.) Geben Sie alle Elemente von S_3 an, und für die zyklischen Permutationen darunter auch eine Zykeldarstellung.
b.) Geben Sie alle nicht-zyklischen Permutationen von S_4 an.

Aufgabe 4: Vollständige Induktion (2+2 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

- a.) Die Summe der ersten n Quadratzahlen ist gleich $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
b.) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2 (Aussage C in Abschnitt 0.5).

Abgabe am Dienstag, 18.09.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.