Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 27.11.2012
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 1: (1+1+2 Punkte)

a.) Sei $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Geben Sie die kleinste Äquivalenzrelation R auf A an, die die folgende Teilmenge von $A \times A$ enthält:

$$\Big\{(1,4), (3,4), (2,6), (6,9), (5,8), (3,8)\Big\}.$$

Geben Sie weiterhin alle Äquivalenzklassen von R an.

b.) Geben Sie die kleinste Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ an, die die Menge $\{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ enthält und bestimmen Sie deren Äquivalenzklassen.

c.) Untersuchen Sie, durch welche der folgenden Definitionen eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ gegeben ist, und geben Sie gegebenenfalls ein vollständiges Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen an:

$$(i) \quad a \sim b \quad := \quad a - b \in \mathbb{Z}.$$
$$(ii) \quad a \sim b \quad := \quad a - b \in [-1, 1].$$

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

a.) Es sei folgende Permutationen gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 5 & 6 & 8 & 4 & 1 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie σ in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern und bestimmen Sie σ^2. Zeigen Sie $\sigma^{3002} = \sigma^2$.

b.) Geben Sie die Untergruppe $U := \langle\, (1\,4)(2\,3\,5)\,\rangle$ von S_5 explizit an und bestimmen Sie $sign(\pi)$ für alle $\pi \in U$. Untersuchen Sie, ob U ein Normalteiler von S_5 ist.

Aufgabe 3: (1+1+1+1 Punkte)

a.) Führen Sie die folgenden Divisionen mit Rest durch:

$$1001 \quad \text{durch} \quad 99 \qquad \text{und} \qquad -999 \quad \text{durch} \quad 102.$$

b.) Bestimmen Sie für folgende Restklassen aus $\mathbb{Z}_n$ jeweils b mit $0 \leq b < n$:

$[b]_7 = [107]_7 \cdot [23]_7 + [122]_7 \cdot [79]_7 \in \mathbb{Z}_7$ und $[b]_{11} = [129]_{11} \cdot [1212]_{11} + [7002]_{11} \in \mathbb{Z}_{11}$.

c.) Geben Sie die Elemente der Untergruppe $U := \langle\, [8]_{12} \,\rangle$ von $\mathbb{Z}_{12}$ an.
Geben Sie die Menge der Linksnebenklassen $\mathbb{Z}_{12}/U$ an.

d.) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}_{24}^*$.

Aufgabe 4: (1+2+1 Punkte)

a.) Sei $f\colon A \longrightarrow B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) Für je zwei Abbildungen $g, h\colon C \longrightarrow A$ gilt: $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.

b.) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$\begin{array}{llrcl}
f_1\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \text{mit} & (x,y) & \mapsto & xy. \\
f_2\colon \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} & \text{mit} & (x,y) & \mapsto & (x+1)(y+1). \\
f_3\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & x & \mapsto & (x^2,\, 3x+2). \\
f_4\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & (x,y) & \mapsto & (y^3,\, x^3).
\end{array}$$

c.) Zeigen Sie, daß es keine Gruppenhomomorphismen der folgenden Art gibt:

- Einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}_{12}$ nach $\mathbb{Z}_8$.
- Einen injektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}_8$ nach $\mathbb{Z}_{12}$.

Aufgabe 5: (1+2+1 Punkte)

a.) Für den $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $P(\{1,2,3\})$ mit der folgenden Basis bestimme man die Koordinaten aller seiner Vektoren:

$$B = \big(\{1,2\},\{2,3\},\{3\}\big).$$

b.) Man untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ Untervektorräume sind und gebe ggf. eine Basis dieses Untervektorraumes an:

$$(i) \qquad \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = -x_3 \quad \text{und} \quad x_1 + 2x_3 = x_4\}.$$

$$(ii) \qquad \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_3 = x_2x_4\}.$$

c.) Für welche $b \in \mathbb{R}$ gibt es eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\psi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ b \end{pmatrix} \quad ?$$

Aufgabe 6: (1+1+1+1 Punkte)

a.) Finden Sie eine injektive lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $(1,1,1) \in \operatorname{im}(f)$.
b.) Finden Sie eine surjektive lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(1,2,3) \in \ker(f)$.
c.) Finden Sie eine bijektive lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(1,2) \mapsto (1,0)$.
d.) Geben Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^9$ mit $f^2 \neq f$ an, die weder injektiv noch surjektiv ist.

Aufgabe 7: (2+1+1 Punkte)

a.) Es sei $(e_1, \ldots, e_5)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^5$. Die lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei erklärt durch

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_4 \mapsto \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \ e_5 \mapsto \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie (durch Angabe von Basen) Bild und Kern dieser linearen Abbildung !

b.) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^8 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
- Ist φ surjektiv, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) = 5$.
- Ist φ nicht surjektiv, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\varphi)) \geq 6$.

c.) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^8$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
- Ist φ injektiv, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi)) = 5$.
- Ist φ nicht injektiv, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi)) \leq 4$.

Aufgabe 8: (1+2+1 Punkte)

a.) Berechnen Sie die Matrizenprodukte AC bzw. CB und deuten Sie diese als Linearkombination der Zeilen bzw. Spalten der Matrix C:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} 2 & -8 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

b.) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 5x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & + & 30x_4 & + & 44x_5 & = & 58, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 13x_4 & + & 19x_5 & = & 25, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 9x_4 & + & 13x_5 & = & 17. \end{array}$$

Man deute die Lösungsmenge als Faser einer linearen Abbildung.

c.) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über über $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{array}{ccccccc} [6]_7 \cdot x_1 & + & [4]_7 \cdot x_2 & + & [6]_7 \cdot x_3 & = & [3]_7, \\ [4]_7 \cdot x_1 & + & [3]_7 \cdot x_2 & + & [6]_7 \cdot x_3 & = & [2]_7, \\ [3]_7 \cdot x_1 & - & [1]_7 \cdot x_2 & + & [6]_7 \cdot x_3 & = & [5]_7, \\ [3]_7 \cdot x_1 & + & [4]_7 \cdot x_2 & + & [4]_7 \cdot x_3 & = & [5]_7. \end{array}$$

Abgabe am Dienstag, 04.12.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.