Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI 20.11.2012
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1: Basen (1+1 Punkte)

a.) Sei $M := \{1, \ldots, n\}$ und $\mathcal{P}(M)$ der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum wie in Aufgabe 2, Blatt 8. Zeigen Sie, daß das System $(\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$ eine Basis von $\mathcal{P}(M)$ ist.

b.) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den folgenden Vektoren erzeugte Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$:

$$\{ (1, 2, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (1, -1, 1, -1), (3, 3, 7, 7) \}.$$

Wählen Sie aus den vier Vektoren eine Basis von U aus und ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2: Lineare Abbildungen und Basen I (1+1+1+1 Punkte)

a.) Finden Sie eine injektive lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(1, 1) = (1, 3, 3)$.

b.) Finden Sie eine surjektive lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(1, 2, 3) = (1, 1)$.

c.) Gegeben sei die Basis $\big((4, 3), (5, 4) \big)$ des $\mathbb{R}^2$ und $f\colon \{(4, 3), (5, 4)\} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ mit:

$$f\colon (4, 3) \mapsto (1, 0, 2, 3)\ ,\quad (5, 4) \mapsto (2, 1, 3, 1).$$

Bestimmen Sie die lineare Fortsetzung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ von f, indem Sie $\varphi(x, y)$ berechnen wie in 2.2.32.

d.) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diejenige lineare Abbildung mit $(1, 0) \mapsto (7, -1, -1)$ und $(0, 1) \mapsto (1, 2, 2)$. Zeigen Sie daß es eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$. Ist g eindeutig bestimmt ?

Bitte wenden

Aufgabe 3: Lineare Abbildungen und Basen II (1+1+1+1 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden linearen Abbildungen nach Wahl einer geeigneten Basis im Ausgangsraum mit Hilfe von 2.2.31. auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

$$\begin{array}{llll}
f_1\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \text{mit} & (x,y,z) & \mapsto \; (x+y+z,\, x+y-z,\, x-y+z). \\
f_2\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \text{mit} & (x,y,z,w) & \mapsto \; (x-y,\, z-w,\, x+z-y-w). \\
f_3\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 & \text{mit} & (x,y) & \mapsto \; (2x+3y,\, 3x-2y,\, x+y). \\
f_4\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{mit} & (x,y,z) & \mapsto \; (2x+3y+4z,\, x+5y+3z).
\end{array}$$

Aufgabe 4: Dimensionen (1+1+1 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum, und es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume.

a.) Zeigen Sie, daß $U \cap W := \{\, x \in V \mid x \in U \text{ und } x \in W \,\}$ ein Untervektorraum von V ist.

b.) Zeigen Sie, daß $U + W := \{\, u + w \mid u \in U,\, w \in W \,\}$ ein Untervektorraum von V ist.

c.) Beweisen Sie folgende Dimensionsformel:

$$\dim_K(U+W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W).$$

Aufgabe 5: Matrizen (2+1 Punkte)

a.) Bilden Sie von den folgenden reellen Matrizen alle möglichen Produkte (denken Sie auch an solche einer Matrix mit sich selbst):

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b.) Bilden Sie von den folgenden Matrizen über $\mathbb{Z}_5$ die Produkte AB und BA:

$$A := \begin{pmatrix} [2]_5 & [3]_5 & [1]_5 \\ [1]_5 & [3]_5 & [4]_5 \\ [2]_5 & [2]_5 & [1]_5 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} [1]_5 & [2]_5 & [1]_5 \\ [2]_5 & [4]_5 & [2]_5 \\ [3]_5 & [1]_5 & [1]_5 \end{pmatrix}.$$

Abgabe am Dienstag, 27.11.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.