Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 13.11.2012

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1: Gleichungssysteme (2+2 Punkte)

a.) Zeigen Sie, daß folgendes lineares Gleichungssystem für $n = 5$ keine Lösung und für $n = 7$ genau eine Lösung hat:

$$\begin{aligned} [2]_n \cdot x_1 + [3]_n \cdot x_2 =& [1]_n \\ [1]_n \cdot x_1 + [4]_n \cdot x_2 =& [2]_n \end{aligned}$$

b.) Bestimmen Sie für das folgende lineare Gleichungssystem alle Lösungen $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_5^2$:

$$\begin{aligned} [2]_5 \cdot x_1 + [3]_5 \cdot x_2 =& [4]_5 \\ [1]_5 \cdot x_1 + [4]_5 \cdot x_2 =& [2]_5 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Koordinaten (2+2 Punkte)

Im folgenden ist jeweils ein K-Vektorraum V mit Basen $B = (x_i)_{i \in I}$ von V gegeben. Bestimmen Sie zu jeder Basis jeweils für alle $v \in V$ die Koordinaten $(a_i)_{i \in I}$ aus der Linearkombination $v = \sum_{i \in I} a_i x_i$:

a.) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit den Basen:

$$B_1 = \big((0,1),(1,1)\big) \quad \text{und} \quad B_2 = \big((2,1),(3,2)\big).$$

b.) Der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $P(\{1,2,3\})$ mit den Basen:

$$B_1 = \big(\{1\},\{2\},\{3\}\big) \quad \text{und} \quad B_2 = \big(\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\big).$$

(Vgl. Aufgabe 2, Blatt 8.)

Bitte wenden

Aufgabe 3: Untervektorräume (1+1+2 Punkte)

a.) Seien V und W Vektorräume über dem Körper K und $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß graph(f) ein Untervektorraum von $V \times W$ ist:

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in V\}.$$

b.) Für einen Körper K und eine nicht-leere Indexmenge I sind die Funktionen von I nach K mit endlichem Träger definiert als die Elemente der folgenden Menge:

$$K^{(I)} := \{f\colon I \longrightarrow K \mid f(i) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i \in I\}.$$

Zeigen Sie, daß $K^{(I)}$ ein Untervektorraum von K^I ist.

c.) Finden Sie eine Basis von $K^{(I)}$ (vergleiche Lemma 2.2.29).

Aufgabe 4: Erzeugendensystem/Lineare Unabhängigkeit (1+1+1+1 Punkte)

a.) Zeigen Sie, daß (2) ein maximal linear unabhängiges System des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$ ist, aber kein Erzeugendensystem.

b.) Zeigen Sie, daß $(2, 3)$ ein minimales Erzeugendensysten des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$ ist, aber nicht linear unabhängig.

c.) Geben Sie in dem $\mathbb{Z}_4$-Modul $\mathbb{Z}_4$ alle einelementigen linear unabhängigen Systeme an.

d.) Zeigen Sie: Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ besitzt kein endliches Erzeugendensystem.

Abgabe am Dienstag, 20.11.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.