Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum 04.09.2012

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1: Äquivalenzrelationen (1+1+2 Punkte)

a.) Sei $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Untersuchen Sie, durch welche der folgenden Teilmengen von $A \times A$ eine Äquivalenzrelation gegeben ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Äquivalenzklassen:

$$R_1 := \{(a, a) \mid a \in A\} \cup \{(1, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)\}.$$

$$R_2 := \{(a, a) \mid a \in A\} \cup \{(2, 4), (4, 2), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (4, 5), (5, 4)\}.$$

b.) Bestimmen Sie die kleinste Äquivalenzrelation auf $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, welche die Menge

$$\{(3, 5), (3, 7), (5, 8), (4, 6), (1, 4)\}$$

enthält, und bestimmen Sie die zugehörigen Äquivalenzklassen.

c.) Eine ganze Zahl ist gerade, wenn sie zu der Menge $\{\, 2k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ gehört und sonst ungerade. Untersuchen Sie, durch welche der folgenden Definitionen eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ gegeben ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Äquivalenzklassen:

$$\begin{array}{llll} (i) & a \sim b & := & a - b \ \text{ ist gerade.} \\ (ii) & a \sim b & := & a - b \ \text{ ist ungerade.} \\ (iii) & a \sim b & := & a \leq b. \\ (iv) & a \sim b & := & a - b = 0. \end{array}$$

Aufgabe 2: Fasern (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie die Fasern der folgenden Abbildungen:

a.) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x^2.$

b.) $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x, y) \mapsto x - y.$

c.) $\operatorname{sign}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$

d.) Beweisen Sie die Bemerkung 0.4.5.iv) der Vorlesung:
Zeigen Sie, daß bei gegebener Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ durch

$$x \sim y \quad := \quad f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation auf A definiert ist, und daß deren Äquivalenzklassen im Falle eines surjektiven f genau die Fasern von f sind.
Welche Rolle spielt die Surjektivität von f für den zweiten Teil der Aussage?

Bitte wenden

Aufgabe 3: Potenzmengen (1+1+2 Punkte)
Zur Erinnerung: Für eine Menge M ist $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge.

a.) Bestimmen Sie $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\emptyset)\big)$.

b.) Sei A eine nicht-leere Menge. Finden Sie eine injektive Abbildung:

$$f\colon A \longrightarrow \mathcal{P}(A).$$

c.) Für Mengen A, B ist die symmetrische Differenz definiert durch:

$$A \ominus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Füllen Sie die folgende Tabelle aus:

$\ominus$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$				
$\{1\}$			$(*)$	
$\{2\}$				
$\{1,2\}$				

Dabei soll z.B. in der zweiten Zeile und dritten Spalte $(*)$ das Ergebnis von $\{1\} \ominus \{2\}$ stehen. Allgemein also:

$$\text{„Zeilenelement} \ \ominus\ \text{Spaltenelement“}.$$

Aufgabe 4: Kompositionen von Abbildungen (1+1+2 Punkte)

a.) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) := x^2$ und $g(x) := 2x + 3$. Berechenen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

b.) Geben Sie Abbildungen $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so daß f injektiv und g surjektiv, jedoch $f \circ g$ weder injektiv noch surjektiv ist.

c.) Seien $f\colon A \longrightarrow B$ und $g\colon B \longrightarrow C$ Abbildungen. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

$$g \circ f \text{ injektiv} \implies f \text{ injektiv}.$$
$$g \circ f \text{ surjektiv} \implies g \text{ surjektiv}.$$

Abgabe am Dienstag, 11.09.2012, vor der Vorlesung im Hörsaal B6 A001.