Aufgabe 1

i) Eine nicht-leere Teilmenge R von $M \times M$ ist eine Äquivalenzrelation auf M, falls gilt:

α) $\forall x \in M: \ (x,x) \in R \quad$ (R reflexiv)

β) $\forall x, y \in M: \ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \quad$ (R symmetrisch)

γ) $\forall x,y,z \in M: \ (x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

(R transitiv)

ii) φ Gruppenhomomorphismus, falls

$$\forall a,b \in G: \ \varphi(a * b) = \varphi(a) \diamond \varphi(b)$$

$$\ker(\varphi) := \{ x \in G \mid \varphi(x) = e_H \}$$

iii) G endliche Gruppe, $U \leq G$ Untergruppe

Dann gilt: $|G| = |G/U| \cdot |U|$

iv) $$\varphi^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & (y \notin \mathrm{im}(\varphi)) \\ a + \ker(\varphi) & (y = \varphi(a), a \in R) \end{cases}$$

v) Zwei aus:

α) $\ker(\varphi) = \{0_R\}$ (nur wegen φ Homom.)

β) $a, b \in R, \ \varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$

γ) $a, b \in R, \ a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$

δ) $\varphi^{-1}(y)$ enthält für jedes $y \in S$ höchstens ein Element

und verwandte Formulierungen

Aufgabe 2:

i) $S_n := \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$

ii) $\sigma = (1\,4\,6\,8\,7\,3)(2\,5)$

$\pi = (1\,8)(2\,4\,6\,3)$

$\sigma \circ \pi = (1\,7\,3\,5\,2\,6)(4\,8)$

$\pi \circ \sigma = (1\,6)(2\,5\,4\,3\,8\,7)$

$\text{sign}(\sigma) = (-1)^{6-1}(-1)^{2-1} = 1$

$\text{sign}(\pi) = (-1)^{2-1}(-1)^{4-1} = 1$

$\text{sign}(\sigma \circ \pi) = \text{sign}(\sigma)\,\text{sign}(\pi) = 1$

$\text{sign}(\pi \circ \sigma) = \text{sign}(\pi)\,\text{sign}(\sigma) = 1$

iii) $U := \langle (1\,2) \rangle = \{ id, (1\,2) \}$

Linksnebenklassen von U:

$id\,U = U = \{ id, (1\,2) \}$

$(1\,3)U = \{(1\,3), (1\,2\,3)\}$ $\quad ((1\,3)(1\,2) = (1\,2\,3))$

$(2\,3)U = \{(2\,3), (1\,3\,2)\}$ $\quad$ Restliche Elemente

iv) $U := \langle (1\,2\,3\,4\,5) \rangle$

$= \{id, (1\,2\,3\,4\,5), (1\,3\,5\,2\,4), (1\,4\,2\,5\,3), (1\,5\,4\,3\,2)\}$

$\Rightarrow (2\,1\,3\,4\,5) \notin U$

$(1\,2)(1\,2\,3\,4\,5)(1\,2)^{-1} = (2\,1\,3\,4\,5) \notin U$

$\Rightarrow U$ kein Normalteiler von S_5

Aufgabe 3:

i) $37 = 4 \cdot 8 + 5 \quad , \quad -39 = (-6) \cdot 7 + 3$

ii) $[8]_5 \cdot [9]_5 + [12]_5 \cdot [7]_5 = [3]_5 \cdot [4]_5 + [2]_5 \cdot [2]_5$

$= [2]_5 + [4]_5 = [1]_5 \qquad (b := 1)$

$[282]_7 [495]_7 + [7002]_7 = [2]_7 \cdot [5]_7 + [2]_7$

$= [3]_7 + [2]_7 = [5]_7 \qquad (b := 5)$

iii) Einheiten:

$[1]_{12} \cdot [1]_{12} = [1]_{12}$

$[5]_{12} \cdot [5]_{12} = [1]_{12}$

$[7]_{12} \cdot [7]_{12} = [1]_{12}$

$[11]_{12} \cdot [11]_{12} = [1]_{12}$

Nullteiler:

$[2]_{12} \cdot [6]_{12} = [0]_{12}$

$[3]_{12} \cdot [4]_{12} = [0]_{12}$

$[8]_{12} \cdot [3]_{12} = [0]_{12}$

$[9]_{12} \cdot [4]_{12} = [0]_{12}$

$[10]_{12} \cdot [6]_{12} = [0]_{12}$

iv) $U := \langle [8]_{14} \rangle = \{ [0]_{14}, [8]_{14}, [2]_{14}, [10]_{14}, [4]_{14}, [12]_{14}, [6]_{14} \}$

<u>Aufgabe 4:</u> i) $\{1,3,4\}, \{2,6\}, \{5\}$

$R := \{(a,a) \mid a \in A\} \cup \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

ii) nicht symmetrisch wegen (z.B.)
$3 \leq 4$, aber $4 \not\leq 3$

iii) α) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$ injektiv,
nicht surjektiv

β) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := 7x$
f bijektiv und $f^{-1}(x) = \frac{1}{7}x$

γ) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} n & \text{für } n \geq 0 \\ n+1 & \text{für } n < 0 \end{cases}$

f ist surjektiv, aber wegen $f(0) = f(-1)$
nicht injektiv

(v) S_4 : nicht abelsch
$\mathbb{Z}_{24}$: abelsch

V_4 : nicht zyklisch
$\mathbb{Z}_4$: zyklisch

S_3 : 6 Elemente
$\mathbb{Z}_8$: 8 Elemente

$\langle (12345) \rangle$: 5 Elemente

$\langle [2]_p \rangle$: 4 Elemente

Aufgabe 5:

i) Ann: $\varphi: \mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_6$ surj. Gruppenhomom.
Nach dem Homomorphiesatz Version II gilt
dann $9 = |\mathbb{Z}_9| = |\ker(\varphi)| \cdot |\operatorname{im}(\varphi)| = |\ker(\varphi)| \cdot 6$

$\Rightarrow$ 6 teilt 9 Wid.

$|\mathbb{Z}_8| = 8$, $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = 6$ $\Rightarrow$ keine injektive Abb. von $\mathbb{Z}_8$ nach $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ möglich.

ii) f_1 Gruppenhomomorphismus
Bew: $f_1((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = f_1((x_1 + x_2, y_1 + y_2))$

$= 3(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 = 3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2$

$= f_1((x_1, y_1)) + f_1((x_2, y_2))$

f_2 kein Gruppenhomom, da
$f_2((0,0)) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$

f_3 kein Gruppenhomom, da
$f_3((1,0) + (0,1)) = f_3((1,1)) = (0,1)$
aber $f_3((1,0)) + f_3((0,1)) = (0,0)$

iii) $\varphi(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow (x+y, y+z, x-z) = (0,0,0)$
$\Leftrightarrow y = -x, \; z = x$
Daher gilt $\ker(\varphi) = \{(x,-x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
Es gilt $\varphi(1,1,0) = (2,1,1)$ (Ansatz $z=0$)

$\Rightarrow$ Homom. Satz Version II $\varphi^{-1}(2,1,1) = (1,1,0) + \ker(\varphi)$
$= \{(x+1, 1-x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 6:

i) $\operatorname{ord}(a) = 2$ für alle $a \in G, a \neq e_G$

$\Rightarrow a^2 = e_G$ für alle $a \in G$

Seien $a, b \in G \Rightarrow (ab)^2 = e_G \Rightarrow abab = e_G$

$$\Rightarrow ab = a\underbrace{(abab)}_{e_G}b = \underbrace{a^2}_{e_G}ba\underbrace{b^2}_{e_G} = ba$$

$\Rightarrow ab = ba \Rightarrow G$ abelsch

ii) $\ker(\varphi) = \{x \in G \mid \varphi(x) = e_H\} \neq \emptyset$, da $\varphi(e_G) = e_H$

Seien $a, b \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(ab^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b^{-1})$

$$= \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e_H e_H^{-1} = e_H$$

$\Rightarrow ab^{-1} \in \ker(\varphi) \underset{1.2.3.}{\Rightarrow} \ker(\varphi)$ Untergruppe

iii) Für $a \in G$, $g \in G$ gilt $a*(a^{-1}*g) = g = a^{-1}*(a*g)$

$\Rightarrow l_a \circ l_{a^{-1}} = id_G = l_{a^{-1}} \circ l_a$

$\Rightarrow l_a$ bijektiv (und $l_a^{-1} = l_{a^{-1}}$)

$l_a(e_G) = a * e_G = a$

$\Rightarrow$ Für $a \neq e_G$ ist l_a kein Homom. wegen $l_a(e_G) \neq e_G$

Ψ_G injektiv: $\Psi_G(a) = \Psi_G(b) \Rightarrow l_a = l_b$

$\Rightarrow l_a(e_G) = l_b(e_G) \Rightarrow a = b$

Ψ_G Gruppenhomom.: Für $a, b \in G$, $g \in G$ gilt

$\Psi_G(a*b)(g) = l_{a*b}(g) \underset{\text{Ass.}}{=} a*(b*g) = l_a(l_b(g))$

$= (\Psi_G(a) \circ \Psi_G(b))(g) \Rightarrow \Psi_G(a*b) = \Psi_G(a) \circ \Psi_G(b)$