Zwischenklausur zur Linearen Algebra I HS 2012, 03.11.2012
Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei M eine nicht-leere Menge. Definieren Sie, was eine Äquivalenzrelation auf M ist.

ii.) (2P) Seien $(G, *)$ und $(H, \diamond)$ Gruppen und $\varphi\colon G \longrightarrow H$ eine Abbildung. Definieren Sie, wann φ ein Gruppenhomomorphismus und was dessen Kern ist.

iii.) (1P) Formulieren Sie den Satz von Lagrange für endliche Gruppen.

iv.) (1P) Sei $\varphi\colon R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus und $y \in S$. Beschreiben Sie die Faser $\varphi^{-1}(y)$ mit Hilfe des Homomorphiesatzes Version II.

v.) (2P) Geben Sie zwei äquivalente Bedingungen dafür an, daß ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \longrightarrow S$ injektiv ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Definieren Sie die Permutationsgruppe S_n.

ii.) (3P) Es seien folgende Permutationen gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi := (1\ 2\ 4)(4\ 2\ 8)(3\ 4\ 6)(1\ 2\ 3).$$

Schreiben Sie die folgenden Permutationen in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern und bestimmen Sie deren Signum:

$$\sigma, \quad \pi, \quad \sigma \circ \pi \quad \text{und} \quad \pi \circ \sigma.$$

iii.) (2P) Geben Sie die Untergruppe $U := \langle\, (1\,2)\,\rangle$ von S_3 und explizit alle Linksnebenklassen von U an.

iv.) (2P) Zeigen Sie, daß die zyklische Untergruppe $U := \langle\, (1\,2\,3\,4\,5)\,\rangle$ von S_5 kein Normalteiler ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Führen Sie die folgenden Divisionen mit Rest durch:

$$37 \quad \text{durch} \quad 8 \qquad \text{und} \qquad -39 \quad \text{durch} \quad 7.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie für folgende Restklassen aus $\mathbb{Z}_n$ jeweils b mit $0 \leq b < n$:

$$[b]_5 = [8]_5 \cdot [9]_5 + [12]_5 \cdot [7]_5 \in \mathbb{Z}_5 \quad \text{und} \quad [b]_7 = [282]_7 \cdot [495]_7 + [7002]_7 \in \mathbb{Z}_7.$$

iii.) (3P) Im Restklassenring $\mathbb{Z}_{12}$ ist jedes von $[0]_{12}$ verschiedene Element ein Nullteiler oder eine Einheit. Finden Sie zu jedem $[a]_{12}$ mit $0 < a < 12$ ein b mit $0 < b < 12$, so daß gilt:

$$[a]_{12} \cdot [b]_{12} = [1]_{12} \quad \text{oder} \quad [a]_{12} \cdot [b]_{12} = [0]_{12}.$$

iv.) (2P) Geben Sie die Elemente der Untergruppe $U := \langle\, [8]_{14} \,\rangle$ von $\mathbb{Z}_{14}$ an.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei $A := \{1,2,3,4,5,6\}$. Geben Sie zu der folgenden Äquivalenzrelation auf A alle Äquivalenzklassen an:

$$R := \{(a,a) \mid a \in A\} \cup \Big\{(1,4),(4,1),(4,3),(3,4),(1,3),(3,1),(2,6),(6,2)\Big\}$$

Sei $B := \{1,2,3,4,5\}$. Geben Sie eine Äquivalenzrelation auf B an, deren Äquivalenzklassen $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ und $\{5\}$ sind.

ii.) (1P) Untersuchen Sie, ob durch die folgende Definition eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ gegeben ist: $x \sim y \quad := \quad x \leq y$.

iii.) (3P) Geben Sie Abbildungen der folgenden Art an:
- Eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die nicht surjektiv ist.
- Eine bijektive Abbildung f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, für die $f(1) = 7$ gilt, sowie deren Umkehrabbildung f^{-1}.
- Eine surjektive Abbildung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$, die nicht injektiv ist.

iv.) (2P) Im folgenden sind Paare von Gruppen angegeben, die jeweils nicht zueinander isomorph sind. Geben Sie jeweils eine Eigenschaft an, bzgl. der sich die Gruppen strukturell unterscheiden:

S_4 und $\mathbb{Z}_{24}$, V_4 und $\mathbb{Z}_4$, S_3 und $\mathbb{Z}_8$ sowie $\langle\, (1\,2\,3\,4\,5)\,\rangle \subseteq S_5$ und $\langle\, [2]_8 \,\rangle \subseteq \mathbb{Z}_8$.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Zeigen Sie, daß es keine Gruppenhomomorphismen der folgenden Art gibt:
- Einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}_9$ nach $\mathbb{Z}_6$.
- Einen injektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}_8$ nach $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

ii.) (3P) Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomorphismen sind:

$$f_1 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x, y) \mapsto 3x + y.$$

$$f_2 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad (x, y) \mapsto (x,\, x - y,\, 1).$$

$$f_3 \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad (x, y) \mapsto (0,\, xy).$$

iii.) (3P) Bestimmen Sie die Faser $\varphi^{-1}\big((2,1,1)\big)$ für den Gruppenhomomorphismus:

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad (x, y, z) \mapsto (x + y,\, y + z,\, x - z).$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei G eine Gruppe mit $\operatorname{ord}(a) = 2$ für alle $a \in G$ mit $a \neq e_G$. Zeigen Sie, daß G abelsch ist.

ii.) (2P) Seien G und H Gruppen sowie $\varphi\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, daß $\ker(\varphi)$ eine Untergruppe von G ist.

iii.) (3P) Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, daß für alle $a \in G$ die Linksmultiplikation $\ell_a\colon G \longrightarrow G$ mit $g \mapsto a * g$ eine Bijektion ist, aber für $a \neq e_G$ kein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie weiter, daß die folgende Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist:

$$\Psi_G\colon G \longrightarrow S(G) \quad \text{mit} \quad a \mapsto \ell_a.$$

Matrikelnummer: