——- Deckblatt ——————-

Klausur zur Linearen Algebra I HWS 2012, 09.02.2013
Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei M eine nicht-leere Menge. Definieren Sie, was eine Äquivalenzrelation auf M ist.

ii.) (1P) Sei $\varphi\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $y \in W$. Beschreiben Sie die Faser $\varphi^{-1}(y)$ mit Hilfe des Homomorphiesatzes Version II.

iii.) (1P) Sei G eine Gruppe. Definieren Sie den Begriff eines Normalteilers von G.

iv.) (1P) Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Definieren Sie die Menge G/U.

v.) (1P) Formulieren Sie den Rangsatz (bzw. die Dimensionsformel) für die lineare Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow W$ zwischen den endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W.

vi.) (2P) Sei V eine abelsche Gruppe und K ein Körper. Weiter sei eine äußere Verknüpfung gegeben:

$$\bullet\colon K \times V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad (l, x) \mapsto l \bullet x$$

Formulieren Sie die Bedingungen V1) bis V4), die erfüllt sein müssen, damit V durch diese äußere Verknüpfung zu einem K-Vektorraum wird.

Lösung:

i.) Eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ heißt Äquivalenzrelation auf M, wenn gilt:

$$\begin{aligned} R \text{ ist reflexiv:} \quad & (a, a) \in R \text{ für alle } a \in M. \\ R \text{ ist symmetrisch:} \quad & (a, b) \in R \quad \Longrightarrow \quad (b, a) \in R. \\ R \text{ ist transitiv:} \quad & (a, b),\ (b, c) \in R \quad \Longrightarrow \quad (a, c) \in R. \end{aligned}$$

Mit der alternativen Notation „$a \sim b$“ für „$(a, b) \in R$“ lauten die Definitionen für die Eigenschaften von R:

$$\begin{aligned} R \text{ ist reflexiv:} \quad & a \sim a \text{ für alle } a \in M, \\ R \text{ ist symmetrisch:} \quad & a \sim b \quad \Longrightarrow \quad b \sim a, \\ R \text{ ist transitiv:} \quad & a \sim b,\ b \sim c \quad \Longrightarrow \quad a \sim c. \end{aligned}$$

ii.) Nach 2.1.31. gilt

$$\varphi^{-1}(y) = \begin{cases} x + \ker(\varphi) & \text{für } y \in \operatorname{im}(\varphi) \text{ und } x \in M \text{ mit } \varphi(x) = y, \\ \emptyset & \text{für } y \notin \operatorname{im}(\varphi). \end{cases}$$

iii.) Eine Untergruppe $N \subseteq G$ heißt Normalteiler von G, falls für alle $g \in G$ ihre Linksnebenklasse bzgl. g mit der Rechtsnebenklasse bzgl. g übereinstimmt, d.h. falls gilt:

$$g * N = N * g \quad \text{für alle} \quad g \in G.$$

Dies ist äquivalent zu der Forderung, daß für alle $g \in G$ gilt: $g * N * g^{-1} = N$.

iv.) G/U ist die Menge der Linksnebenklassen von U, also:

$$G/U := \{\, g * U \mid g \in U \,\}.$$

v.) Es gilt nach 2.2.56 bzw. 2.2.58:
$\dim_K(V) = \dim_K\big(\ker(\varphi)\big) + \mathrm{rg}_K(\varphi) = \dim_K\big(\ker(\varphi)\big) + \dim_K\big(\mathrm{im}(\varphi)\big)$.

vi.) Definition 2.1.2:

$$\begin{aligned}
V1: &\quad 1_R \cdot m = m && \text{für alle } m \in M.\\
V2: &\quad r(m+n) = rm + rn && \text{für alle } r \in R,\ m, n \in M.\\
V3: &\quad (r+s)m = rm + sm && \text{für alle } r, s \in R,\ m \in M.\\
V4: &\quad (rs)m = r(sm) && \text{für alle } r, s \in R,\ m \in M.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei $A := \{1,2,3,4,5\}$. Geben Sie diejenige Äquivalenzrelation auf A an, deren Äquivalenzklassen $\{1,2\}$ und $\{3,4,5\}$ sind.

ii.) (1P) Definieren Sie die Permutationsgruppe S_n.

iii.) (3P) Es seien die folgenden Permutationen aus S_8 gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \pi := (3\ 8)(1\ 8)(7\ 3\ 6)(1\ 4\ 5\ 2)(3\ 5\ 6\ 8\ 1).$$

Schreiben Sie die folgenden Permutationen in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern::

$$\sigma, \quad \pi, \quad \text{und} \quad \sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}.$$

iv.) (2P) Die Diedergruppe D_4 ist die folgende Untergruppe von S_4:

$$D_4 := \{ \text{id}, (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2)(3\,4), (1\,3), (2\,4) \}.$$

Geben Sie zu der folgenden Untergruppe U von D_4 alle Linksnebenklassen explizit an:

$$U := \langle (1\,4)(2\,3) \rangle.$$

Lösung:

i.) Die gesuchte Äquivalenzrelation ist

$$R := \{(a,a) \mid a \in A\} \cup \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4)\}.$$

ii.) $S_n := \{ f\colon \{1,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,\ldots,n\} \mid f \text{ bijektiv} \}$.

iii.) Es gilt $\sigma = (1\,4\,8\,5\,7\,2)(3\,6)$, $\pi = (1\,6)(2\,3)(4\,5\,7\,8)$ sowie

$$\sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(1)\,\sigma(6)\big)\big(\sigma(2)\,\sigma(3)\big)\big(\sigma(4)\,\sigma(5)\,\sigma(7)\,\sigma(8)\big) = (4\,3)(1\,6)(8\,7\,2\,5).$$

iv.) Die Linksnebenklassen lauten:

$$\begin{aligned} U &= \{id, (1\,4)(2\,3)\}, \\ (1\,2\,3\,4))U &= \{(1\,2\,3\,4), (2\,4)\}, \\ (1\,4\,3\,2)U &= \{(1\,4\,3\,2), (1\,3)\}, \\ (1\,3)(2\,4)U &= \{(1\,3)(2\,4), (1\,2)(3\,4)\}. \end{aligned}$$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Bestimmen Sie für folgende Restklassen aus $\mathbb{Z}_9$ jeweils b mit $0 \leq b < 9$:

$$[b]_9 = [3]_9 \cdot [7]_9 + [13]_9 \cdot [14]_9 \in \mathbb{Z}_9 \quad \text{und} \quad [b]_9 = [25]_9 \cdot \big([17]_9 + [24]_9\big) \in \mathbb{Z}_9.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{Z}_{11}$ zu jedem der folgenden Elemente $y \in \mathbb{Z}_{11}$ die beiden $x \in \mathbb{Z}_{11}$ mit $x^2 = y$:

$$y \in \{\ [4]_{11},\ [5]_{11},\ [9]_{11}\ \}$$

iii.) (2P) Im folgenden sind Paare von Gruppen angegeben, die jeweils nicht zueinander isomorph sind. Geben Sie jeweils eine Eigenschaft an, bzgl. der sich die Gruppen strukturell unterscheiden:

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \text{ und } \mathbb{Z}_{24}, \qquad S_3 \text{ und } \mathbb{Z}_6, \qquad \langle\, (1\,2\,3\,4)\, \rangle \subseteq S_4 \text{ und } \langle\, [4]_{10}\, \rangle \subseteq \mathbb{Z}_{10}.$$

iv.) (2P) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Linksmultiplikation

$$\lambda_{[8]_{12}} : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \quad \text{mit} \quad [b]_{12} \mapsto [8b]_{12}.$$

Lösung:

i.) Es gilt

$$\begin{aligned} [3]_9 \cdot [7]_9 + [13]_9 \cdot [14]_9 &= [21]_9 + [4]_9 \cdot [5]_9 \\ &= [3]_9 + [20]_9 = [3]_9 + [2]_9 = [5]_9 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} [25]_9 \cdot ([17]_9 + [24]_9) &= [7]_9 \cdot \big([8]_9 + [6]_9\big) \\ &= [7]_9 \cdot [5]_9 = [35]_9 = [8]_9. \end{aligned}$$

ii.) Wegen $x^2 = (-x)^2$ ist es ausreichend, jeweils ein x mit $x^2 = y$ zu finden, denn mit $[a]_{11}$ ist dann $[-a]_{11} = [11 - a]_{11}$ die zweite Lösung:

$$\begin{aligned} x^2 = [4]_{11} &\quad\Longrightarrow\quad x \in \{[2]_{11},\ [9]_{11}\}, \\ x^2 = [5]_{11} &\quad\Longrightarrow\quad x \in \{[4]_{11},\ [7]_{11}\}, \\ x^2 = [9]_{11} &\quad\Longrightarrow\quad x \in \{[3]_{11},\ [8]_{11}\}. \end{aligned}$$

iii.) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ ist nicht zyklisch, aber $\mathbb{Z}_{24}$ ist zyklisch, also sind diese beiden Gruppen nicht isomorph.
$\mathbb{Z}_6$ ist abelsch, aber S_3 ist nicht abelsch, also sind diese beiden Gruppen nicht isomorph.
$\langle\, (1\,2\,3\,4)\, \rangle$ enthält vier Elemente und $\langle\, [4]_{10}\, \rangle$ enthält fünf Elemente, also sind diese beiden Gruppen nicht isomorph.

Matrikelnummer:

iv.) Die kleinste positive ganze Zahl b mit $[8b]_{12} = [0]_{12}$ ist $b = 3$.
Daher gilt
$$\ker(\lambda_{[8]_{12}}) = \{\, [0]_{12},\, [3]_{12},\, [6]_{12},\, [9]_{12} \,\}$$
und
$$\operatorname{im}(\lambda_{[8]_{12}}) = \{\, [0]_{12},\, [8]_{12},\, [4]_{12} \,\}.$$

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -4 & -12 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

i.) (4P) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Az = b$ mit:

$$z \in \mathbb{R}^{[4]} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{[3]}.$$

ii.) (4P) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung:

$$\varphi_A \colon \mathbb{R}^{[4]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]} \quad \text{mit} \quad x \mapsto A \cdot x.$$

Lösung:

i.) Zuerst wird das erweiterte System $(A|b)$ in spezielle Zeilen-Stufen-Form transformiert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ -4 & -12 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \mid\ : 10 \\ \mid\ : (-2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nun kann die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Az = b$ aus der speziellen Zeilen-Stufen-Form abgelesen werden: Eine spezielle Lösung ergibt sich, indem der rechte Vektor als Linearkombination derjenigen Matrizenspalten mit den Einheitsvektoren an den Stufenecken geschrieben wird, d.h. (-1) mal Spalte $j_1 = 1$ und 2 mal Spalte $j_2 = 4$ was den folgenden speziellen Lösungsvektor ergibt:

$$v_{\text{inh}} := \begin{array}{c} j_1 \\ \\ \\ j_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Rang der Matrix A ist Zwei, da deren Zeilen-Stufen-Form zwei Stufen hat, und daher die Dimension des Lösungsraums des homogenen linearen Gleichungssystems $4-2=2$. Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems entsprechen Linearkombinationen der Spalten von A oder dessen Zeilen-Stufen-Form, die den Nullvektor ergeben. Eine Basis des Lösungsraums des homogenen linearen Gleichungssystems bilden z.B. die Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren können aus den Spalten der speziellen Zeilen-Stufen-Form von A gewonnen werden, die keine Stufenecken bilden, also aus der zweiten und der vierten Spalte. Dazu wird ein solcher Spaltenvektor aus den vor ihm stehenden Einheitsvektoren an den Stufenecken zusammengesetzt und dann er selbst davon abgezogen, so daß sich eine Null-Lösung ergibt.

Der Vektor v_1 ist gebildet, indem die zweite Spalte aus zweimal der ersten Spalte erzeugt und sie selbst dann abgezogen wird. Der Vektor v_2 wird aus der vierten Spalte gewonnen, indem einmal die erste Spalte und einmal die dritte Spalte addiert und dann die vierte Spalte abzogen wird.

Die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystem $Az = b$ ist eine Nebenklasse der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit einer speziellen Lösung als Repräsentanten, so daß sich letztendlich ergibt:

$$\text{Lösungsmenge von } Az = b: \quad v_{\text{inh}} + \langle\, v_1,\, v_2 \,\rangle.$$

ii.) Da $\ker(\varphi_A)$ mit der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ übereinstimmt und letztere mit der Basis v_1, v_2 im ersten Teil schon berechnet wurde, ergibt sich sofort:

$$\ker(\varphi_A) = \langle\, v_1,\, v_2 \,\rangle.$$

Die Spalten von A sind nach Lemma 3.1.17 ein Erzeugendensystem des Bildes von φ_A. Es gilt nach Bemerkung 3.2.13 $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im}(\varphi_A)) = \operatorname{rg}(A) = 2$, so daß aus den Spalten von A eine zweielementige Basis von φ_A ausgewählt werden muß. Aus der speziellen Zeilenstufenform ist zu entnehmen, daß $\operatorname{im}(\varphi_A)$ als Basis den ersten und den dritten Spaltenvekor von A besitzt, da an diesen Stellen die Stufen beginnen und diese Spalten damit linear unabhängig sein müssen. Somit gilt:

$$\operatorname{im}(\varphi_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

und diese beiden Vektoren bilden auch eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi_A)$.

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Bestimmen Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die Koordinaten der folgenden Vektoren v_1 und v_2 bzgl. der Basis $\big((7,6),\,(5,6)\big)$:

$$v_1 := (2,0) \quad \text{und} \quad v_2 := (3,6).$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

iii.) (2P) Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ ein Untervektorraum ist:
a.) $U_1 := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y+z\ \}$.
b.) $U_2 := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = yz\ \}$.

iv.) (2P) Zeigen Sie, daß folgende Abbildungen nicht linear sind:
a.) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \mapsto (2x+3y,\ 2y^2)$.
b.) $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \mapsto (2x+3y,\ 2y+1)$.

Lösung:

i.) Die Vektoren v_1, v_2 haben folgende Darstellungen als Linearkombination der Basis:

$$v_1 = 1\cdot(7,6) + (-1)\cdot(5,6)$$
$$v_2 = (-1)\cdot(7,6) + 2\cdot(5,6)$$

Dies liefert folgende Kooerdinaten der Vektoren:

$$v_1:\quad \big(1,\,-1\big) \qquad \text{und} \qquad v_2:\quad \big(-1,\,2\big).$$

Die Koordinaten können z.B. durch Lösen eines linearen Gleichungssystems gefunden werden, und für den Vektor $v_2 = (3,6)$ ergibt sich dann:

$$a_1\cdot(7,6) + a_2\cdot(5,6) = (3,6)$$

liefert das inhomogene LGS mit der erweiterten Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-6) \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 12 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid :12 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \ \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad (-1)\cdot(7,6) + 2\cdot(5,6) = (3,6).$$

Matrikelnummer:

ii.) Die Inverse von A kann mit dem Gauss-Algorithmus berechnet werden, in dem die spezielle Zeilen-Stufen-Form von A berechnet wird und die Zeilen-Transformationen gleichzeitig auf das erweiterte System $(A|E_2)$ angewandt werden: $(A|E_2) \rightsquigarrow (E_2|A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ -5 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 16 & -10 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:2 \\ \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) .$$

Also gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

iii.) U_1 ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ als Lösungsmenge des homogenen LGS bestehend aus einer Gleichung $x - y - z = 0$ bzw. als Kern der linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \mapsto x - y - z$.
U_2 ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, da z.B. $(2, 1, 2)$ und $(3, 1, 3)$ in U_2 liegen, aber nicht deren Summe: $(5, 2, 5) \notin U_2$.

iv.) f ist nicht linear wegen:

$$f\big((2,2)\big) = (10, 8) \neq (10, 4) = f((1,1)) + f\big((1,1)\big).$$

g ist nicht linear wegen $g\big((0,0)\big) = (0,1) \neq (0,0)$.

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei G eine endliche Gruppe mit neutralem Element e_G und $|G| = n$. Beweisen Sie, dass für alle $g \in G$ gilt: $g^n = e_G$.
(Hinweis: Betrachten Sie $\operatorname{ord}(g)$ für $g \in G$.)

ii.) (2P) Sei $\varphi\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie, daß $\ker(\varphi)$ ein Untervektorraum von V ist.

iii.) (3P) Sei V ein fünfdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit $\varphi^2 = \bar{0}$ die Nullabbildung. Beweisen Sie: $\dim_K(\ker(\varphi)) \geq 3$.

Lösung:

i.) Es gilt $\operatorname{ord}(g) = |\langle g \rangle|$, und da $\langle g \rangle$ eine Untergruppe von G ist, folgt aus dem Satz von Lagrange, dass $\operatorname{ord}(g)$ ein Teiler von $|G| = n$ ist. Also existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = k \cdot \operatorname{ord}(g)$. Wegen $g^{\operatorname{ord}(g)} = e_G$ folgt daraus

$$g^n = g^{k \cdot \operatorname{ord}(g)} = (g^{\operatorname{ord}(g)})^k = e_G^k = e_G.$$

ii.) Wegen $\varphi(0_V) = 0_W$ gilt $0_V \in \ker(\varphi)$.
Seien nun $a, b \in K$ und $x, y \in \ker(\varphi)$. Dann gilt $\varphi(x) = \varphi(y) = 0_W$ und wegen der Linearität von φ folgt

$$\varphi(ax + by) = \varphi(ax) + \varphi(by) = a\varphi(x) + b\varphi(y) = 0_W$$

also $ax + by \in \ker(\varphi)$. Damit ist nach dem Unterverktorraumkriterium (Lemma 2.1.13) $\ker(\varphi)$ ein Untervektorraum.

iii.) Aus der Voraussetzung $\varphi^2 = \bar{0}$ folgt zunächst $\operatorname{im}(\varphi) \subseteq \ker(\varphi)$, denn für jedes $y \in \operatorname{im}(\varphi)$ gibt es ein $x \in V$ mit $y = \varphi(x)$ und es folgt:

$$\varphi(y) = \varphi(\varphi(x)) = (\varphi \circ \varphi)(x) = \varphi^2(x) = 0,$$

also $y \in \ker(\varphi)$.

Aus $\operatorname{im}(\varphi) \subseteq \ker(\varphi)$ folgt nun aber $\dim_K\big(\operatorname{im}(\varphi)\big) \leq \dim_K\big(\ker(\varphi)\big)$, und mit der Dimensionsformel liefert dies:

$$5 = \dim_K(V) = \dim_K\big(\ker(\varphi)\big) + \dim_K\big(\operatorname{im}(\varphi)\big) \leq 2 \cdot \dim_K\big(\ker(\varphi)\big).$$

Daraus folgt aber sofort $\dim_K\big(\ker(\varphi)\big) \geq 3$, da $\dim_K\big(\ker(\varphi)\big)$ eine ganze Zahl ist.