Klausur zur Linearen Algebra I HWS 2012, 09.02.2013
Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei M eine nicht-leere Menge. Definieren Sie, was eine Äquivalenzrelation auf M ist.

ii.) (1P) Sei $\varphi\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen und $y \in W$. Beschreiben Sie die Faser $\varphi^{-1}(y)$ mit Hilfe des Homomorphiesatzes Version II.

iii.) (1P) Sei G eine Gruppe. Definieren Sie den Begriff eines Normalteilers von G.

iv.) (1P) Sei G eine Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Definieren Sie die Menge G/U.

v.) (1P) Formulieren Sie den Rangsatz (bzw. die Dimensionsformel) für die lineare Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow W$ zwischen den endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W.

vi.) (2P) Sei V eine abelsche Gruppe und K ein Körper. Weiter sei eine äußere Verknüpfung gegeben:

$$\bullet\colon K \times V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad (l, x) \mapsto l \bullet x$$

Formulieren Sie die Bedingungen V1) bis V4), die erfüllt sein müssen, damit V durch diese äußere Verknüpfung zu einem K-Vektorraum wird.

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie diejenige Äquivalenzrelation auf A an, deren Äquivalenzklassen $\{1, 2\}$ und $\{3, 4, 5\}$ sind.

ii.) (1P) Definieren Sie die Permutationsgruppe S_n.

iii.) (3P) Es seien die folgenden Permutationen aus S_8 gegeben:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \pi := (3\ 8)(1\ 8)(7\ 3\ 6)(1\ 4\ 5\ 2)(3\ 5\ 6\ 8\ 1).$$

Schreiben Sie die folgenden Permutationen in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern::

$$\sigma, \quad \pi, \quad \text{und} \quad \sigma \circ \pi \circ \sigma^{-1}.$$

iv.) (2P) Die Diedergruppe D_4 ist die folgende Untergruppe von S_4:

$$D_4 := \{ \text{id}, (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3), (1\,2)(3\,4), (1\,3), (2\,4) \}.$$

Geben Sie zu der folgenden Untergruppe U von D_4 alle Linksnebenklassen explizit an:

$$U := \langle (1\,4)(2\,3) \rangle.$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Bestimmen Sie für folgende Restklassen aus $\mathbb{Z}_9$ jeweils b mit $0 \leq b < 9$:

$$[b]_9 = [3]_9 \cdot [7]_9 + [13]_9 \cdot [14]_9 \in \mathbb{Z}_9 \quad \text{und} \quad [b]_9 = [25]_9 \cdot \big([17]_9 + [24]_9\big) \in \mathbb{Z}_9.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{Z}_{11}$ zu jedem der folgenden Elemente $y \in \mathbb{Z}_{11}$ die beiden $x \in \mathbb{Z}_{11}$ mit $x^2 = y$:

$$y \in \{\, [4]_{11},\, [5]_{11},\, [9]_{11} \,\}$$

iii.) (2P) Im folgenden sind Paare von Gruppen angegeben, die jeweils nicht zueinander isomorph sind. Geben Sie jeweils eine Eigenschaft an, bzgl. der sich die Gruppen strukturell unterscheiden:

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \text{ und } \mathbb{Z}_{24}, \qquad S_3 \text{ und } \mathbb{Z}_6, \qquad \langle\, (1\,2\,3\,4)\,\rangle \subseteq S_4 \text{ und } \langle\, [4]_{10}\,\rangle \subseteq \mathbb{Z}_{10}.$$

iv.) (2P) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Linksmultiplikation

$$\lambda_{[8]_{12}} : \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \quad \text{mit} \quad [b]_{12} \mapsto [8b]_{12}.$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ -4 & -12 & 8 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

i.) (4P) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Az = b$ mit:

$$z \in \mathbb{R}^{[4]} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{[3]}.$$

ii.) (4P) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung:

$$\varphi_A : \mathbb{R}^{[4]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]} \quad \text{mit} \quad x \mapsto A \cdot x.$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Bestimmen Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ die Koordinaten der folgenden Vektoren v_1 und v_2 bzgl. der Basis $\big((7,6),\,(5,6)\big)$:

$$v_1 := (2,0) \quad \text{und} \quad v_2 := (3,6).$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

iii.) (2P) Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ ein Untervektorraum ist:

a.) $U_1 := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z \,\}$.

b.) $U_2 := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = yz \,\}$.

iv.) (2P) Zeigen Sie, daß folgende Abbildungen nicht linear sind:

a.) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \mapsto (2x+3y,\, 2y^2)$.

b.) $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \mapsto (2x+3y,\, 2y+1)$.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei G eine endliche Gruppe mit neutralem Element e_G und $|G| = n$. Beweisen Sie, dass für alle $g \in G$ gilt: $g^n = e_G$.
(Hinweis: Betrachten Sie $\mathrm{ord}(g)$ für $g \in G$.)

ii.) (2P) Sei $\varphi\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Zeigen Sie, daß $\ker(\varphi)$ ein Untervektorraum von V ist.

iii.) (3P) Sei V ein fünfdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit $\varphi^2 = \bar{0}$ die Nullabbildung. Beweisen Sie: $\dim_K(\ker(\varphi)) \geq 3$.

Matrikelnummer: