Klausur zur Linearen Algebra I HS 2012, 12.12.2012
Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Formulieren Sie den Satz von Lagrange für endliche Gruppen.
ii.) (2P) Sei V ein K-Vektorraum. Geben Sie vier äquivalente Bedingungen dafür an, daß ein System $(x_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V eine Basis von V ist.
iii.) (2P) Definieren Sie, wann eine Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow W$ zwischen den K-Vektorräumen V und W linear ist und deren Kern.
iv.) (1P) Formulieren Sie den Rangsatz (bzw. die Dimensionsformel) für die lineare Abbildungen $\varphi\colon V \longrightarrow W$ zwischen den endlichdimensionalen K-Vektorräumen V und W.
v.) (2P) Sei $\varphi\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W und $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Geben Sie jeweils eine Bedingung für das System $(\varphi(x_i))_{i\in I}$ an, so daß φ injektiv ist bzw. surjektiv ist.

Lösung:

i.) Sei G eine endliche Gruppe und $U \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gilt nach dem Satz von Lagrange (1.2.20):
$$|G| = |U| \cdot |G/U|.$$

ii.) Nach Satz 2.2.37 sind folgende vier Bedingungen äquivalent dazu, daß $(x_i)_{i\in I}$ eine Basis von V ist:

1.) $(x_i)_{i\in I}$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V.
2.) Jedes $x \in V$ hat eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von $(x_i)_{i\in I}$.
3.) $(x_i)_{i\in I}$ ist ein maximal linear unabhängiges System in V.
4.) $(x_i)_{i\in I}$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

iii.) Nach Definition 2.1.16 ist φ linear, wenn gilt:
$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \text{ und } \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \text{ für alle } x, y \in V \text{ und alle } \lambda \in K.$$
Der Kern von φ ist nach 2.1.26 definiert durch:
$$\ker(\varphi) := \{\, x \in V \mid \varphi(x) = 0 \,\}.$$

iv.) Es gilt nach 2.2.56 bzw. 2.2.58:
$$\dim_K(V) = \dim_K\big(\ker(\varphi)\big) + \operatorname{rg}_K(\varphi) = \dim_K\big(\ker(\varphi)\big) + \dim_K\big(\operatorname{im}(\varphi)\big).$$

v.) Nach dem Hauptsatz über lineare Abbildungen und Basen (2.2.31) gilt:
$$\varphi \text{ injektiv} \iff \big(\varphi(x_i)\big)_{i\in I} \text{ ist ein linear unabhängiges System in } W.$$
$$\varphi \text{ surjektiv} \iff \big(\varphi(x_i)\big)_{i\in I} \text{ ist ein Erzeugendensystem von } W.$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie zu der folgenden Äquivalenzrelation auf A alle Äquivalenzklassen an:

$$R := \{(a, a) \mid a \in A\} \cup \big\{(1, 2), (2, 1), (4, 3), (3, 4), (1, 5), (5, 1), (2, 5), (5, 2)\big\}.$$

ii.) (1P) Definieren Sie die Permutationsgruppe S_n.

iii.) (2P) Schreiben Sie die folgenden Permutationen aus S_8 in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \pi := (3\,1\,8)(5\,1\,8)(7\,4\,6)(1\,2\,3\,4)(3\,5\,6\,8\,2).$$

iv.) (1P) Geben Sie ein Element $\sigma \in S_7$ an mit $ord(\sigma) = 12$.

v.) (2P) Zeigen Sie, daß die zyklische Untergruppe $U := \langle\, (1\,3\,6\,7)\,\rangle \subseteq S_7$ kein Normalteiler von S_7 ist.

Lösung:

i.) $[1] = \{1, 2, 5\} = [2] = [5]$ und $[3] = \{3, 4\} = [4]$ sind alle Äquivalenzklassen.

ii.) $S_n := \big\{\ f\colon \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \mid f \text{ bijektiv }\big\}$.

iii.) $\sigma = (1\,5\,7\,2)(3\,8\,4\,6)$ und $\pi = (1\,2\,6\,5\,7\,4\,3\,8)$.

iv.) $\sigma := (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7)$ hat die Ordnung $3 \cdot 4 = 12$.

v.) Mit $\sigma := (1\,3\,6\,7)$ gilt:

$$U = \big\{\sigma^0, \ldots, \sigma^3\big\} = \big\{\ \mathrm{id},\ (1\,3\,6\,7),\ (1\,6)(3\,7),\ (1\,7\,6\,3)\ \big\}.$$

Sei $\pi := (1\,2) \in S_7$. Dann folgt:

$$\pi(1\,3\,6\,7)\pi^{-1} = (2\,3\,6\,7) \notin U,$$

und U ist kein Normalteiler von S_7.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Bestimmen Sie für folgende Restklassen aus $\mathbb{Z}_8$ jeweils b mit $0 \leq b < 8$:

$$[b]_8 = [2]_8 \cdot [5]_8 + [22]_8 \cdot [23]_8 \in \mathbb{Z}_8 \quad \text{und} \quad [b]_8 = [28]_8 \cdot \big([19]_8 + [27]_8\big) \in \mathbb{Z}_8.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{Z}_7$ zu jedem $x \in \mathbb{Z}_7^*$ sein multiplikatives Inverses.

iii.) (2P) Im folgenden sind Paare von Gruppen angegeben, die jeweils nicht zueinander isomorph sind. Geben Sie jeweils eine Eigenschaft an, bzgl. der sich die Gruppen strukturell unterscheiden:

$$\mathbb{Z} \text{ und } \mathbb{Z}_{60}, \qquad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \text{ und } \mathbb{Z}_8, \qquad \langle\, (1\,2)(3\,4)\,\rangle \subseteq S_4 \text{ und } \langle\, [2]_6\,\rangle \subseteq \mathbb{Z}_6.$$

iv.) (2P) Zeigen Sie, daß keine Gruppenhomomorphismen der folgenden Art existieren können:

a.) Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von S_4 nach $\mathbb{Z}_5$.

b.) Ein injektiver Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}_4$ nach $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Lösung:

i.) Es gilt:

$$\begin{aligned}[2]_8 \cdot [5]_8 + [22]_8 \cdot [23]_8 &= [10]_8 + [6]_8 \cdot [7]_8 \\ &= [2]_8 + [42]_8 = [2]_8 + [2]_8 = [4]_8\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}[28]_8 \cdot ([19]_8 + [27]_8) &= [4]_8 \cdot \big([3]_8 + [3]_8\big) \\ &= [4]_8 \cdot [6]_8 = [24]_8 = [0]_8.\end{aligned}$$

ii.) Das Ergebnis wird als Tabelle dargestellt:

$[a]_7$	$[1]_7$	$[2]_7$	$[3]_7$	$[4]_7$	$[5]_7$	$[6]_7$
$[a]_7^{-1}$	$[1]_7$	$[4]_7$	$[5]_7$	$[2]_7$	$[3]_7$	$[6]_7$

iii.) $\mathbb{Z}$ ist unendlich, aber $\mathbb{Z}_{60}$ ist endlich mit $|\mathbb{Z}_{60}| = 60$, also sind diese beiden Gruppen nicht isomorph.
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ist nicht zyklisch, aber $\mathbb{Z}_8$ ist zyklisch, also sind diese beiden Gruppen nicht isomorph.
$\langle\, (1\,2)(3\,4)\,\rangle$ enthält zwei Elemente und $\langle\, [2]_6\,\rangle$ enthält drei Elemente, also sind diese beiden Gruppen nicht isomorph.

iv.) Angenommen $\varphi\colon S_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_5$ wäre ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Dann wäre nach dem Homomorphiesatz Version II (1.2.59):

$$24 = |S_4| = |\operatorname{im}(\varphi)| \cdot |\ker(\varphi)| = 5 \cdot |\ker(\varphi)|.$$

Widerspruch, da 5 kein Teiler von $|S_4| = 24$ ist.
Angenommen $\varphi\colon \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ wäre ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Dann wäre $|\operatorname{im}(\varphi)| = 4$, und da $\operatorname{im}(\varphi)$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ist (1.2.58), müsste nach dem Satz von Lagrange 4 ein Teiler von $|\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3| = 9$ sein, Widerspruch!

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

i.) (4P) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Az = b$ mit:

$$z \in \mathbb{R}^{[4]} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{[3]}.$$

ii.) (4P) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung:

$$\varphi_A : \mathbb{R}^{[4]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]} \quad \text{mit} \quad x \mapsto A \cdot x.$$

Lösung:

i.) Zuerst wird das erweiterte System $(A|b)$ in spezielle Zeilen-Stufen-Form transformiert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & -12 & -8 & -4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad | : 2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nun kann die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Az = b$ aus der speziellen Zeilen-Stufen-Form abgelesen werden: Eine spezielle Lösung ergibt sich, indem der rechte Vektor als Linearkombination derjenigen Matrizenspalten mit den Einheitsvektoren an den Stufenecken geschrieben wird, d.h. 8 mal Spalte $j_1 = 1$ und 3 mal Spalte $j_2 = 3$ was den folgenden speziellen Lösungsvektor ergibt:

$$v_{\text{inh}} := \begin{array}{c} j_1 \\ \\ j_2 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang der Matrix A ist Zwei, da deren Zeilen-Stufen-Form zwei Stufen hat, und daher die Dimension des Lösungsraums des homogenen linearen Gleichungssystems $4 - 2 = 2$. Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems entsprechen Linearkombinationen der Spalten von A oder dessen Zeilen-Stufen-Form, die den Nullvektor ergeben. Eine Basis des Lösungsraums des homogenen linearen Gleichungssystems bilden z.B. die Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren können aus den Spalten der speziellen Zeilen-Stufen-Form von A gewonnen werden, die keine Stufenecken bilden, also aus der zweiten und der vierten Spalte. Dazu wird ein solcher Spaltenvektor aus den vor ihm stehenden Einheitsvektoren an den Stufenecken zusammengesetzt und dann er selbst davon abgezogen, so daß sich eine Null-Lösung ergibt.

Der Vektor v_1 ist gebildet, indem die zweite Spalte aus zweimal der ersten Spalte erzeugt und sie selbst dann abgezogen wird. Der Vektor v_2 wird aus der vierten Spalte gewonnen, indem einmal die erste Spalte und einmal die dritte Spalte addiert und dann die vierte Spalte abzogen wird.

Die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystem $Az = b$ ist eine Nebenklasse der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit einer speziellen Lösung als Repräsentanten, so daß sich letztendlich ergibt:

$$\text{Lösungsmenge von } Az = b: \quad v_{\text{inh}} + \langle\, v_1,\, v_2 \,\rangle.$$

ii.) Da $\ker(\varphi_A)$ mit der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ übereinstimmt und letztere mit der Basis v_1, v_2 im ersten Teil schon berechnet wurde, ergibt sich sofort:

$$\ker(\varphi_A) = \langle\, v_1,\, v_2 \,\rangle.$$

Die Spalten von A sind nach Lemma 3.1.17 ein Erzeugendensystem des Bildes von φ_A. Es gilt nach Bemerkung 3.2.13 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{im}(\varphi_A)) = \mathrm{rg}(A) = 2$, so daß aus den Spalten von A eine zweielementige Basis von φ_A ausgewählt werden muß. Aus der speziellen Zeilenstufenform ist zu entnehmen, daß $\mathrm{im}(\varphi_A)$ als Basis den ersten und den dritten Spaltenvekor von A besitzt, da an diesen Stellen die Stufen beginnen und diese Spalten damit linear unabhängig sein müssen. Somit gilt:

$$\mathrm{im}(\varphi_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

und diese beiden Vektoren bilden auch eine Basis von $\mathrm{im}(\varphi_A)$.

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Geben Sie im $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ die Koordinaten der folgenden Vektoren v_1 und v_2 bzgl. der Basis $(\{3\},\{1,2\},\{1,3\})$ an:

$$v_1 := \{1,2,3\} \quad \text{und} \quad v_2 := \{2,3\}.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

iii.) (1P) Geben Sie zu der folgenden linearen Abbildung ψ die darstellende Matrix $[\psi]$ an:

$$\psi\colon \mathbb{R}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-3y+5z \\ 4y-3z \\ 2x-z \end{pmatrix}.$$

iv.) (3P) Geben Sie vollständige Abbildungsvorschriften für lineare Abbildungen an, die folgende Bedingungen erfüllen:
a.) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(1,0)\mapsto(1,1)$ und $(0,1)\mapsto(1,1)$.
b.) $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(g) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$ und $(1,2)\in \mathrm{im}(g)$.

Lösung:

i.) Die Vektoren v_1, v_2 haben folgende Darstellungen als Linearkombination der Basis:

$$v_1 = [1]_2\cdot\{3\} \ominus [1]_2\cdot\{1,2\} \ominus [0]_2\cdot\{1,3\},$$
$$v_2 = [0]_2\cdot\{3\} \ominus [1]_2\cdot\{1,2\} \ominus [1]_2\cdot\{1,3\}.$$

Dies liefert folgende Kooerdinaten der Vektoren:

$$v_1: \quad \big([1]_2,\,[1]_2,\,[0]_2\big) \qquad \text{und} \qquad v_2: \quad \big([0]_2,\,[1]_2,\,[1]_2\big).$$

ii.) Die Inverse von A kann mit dem Gauss-Algorithmus berechnet werden, in dem die spezielle Zeilen-Stufen-Form von A berechnet wird und die Zeilen-Transformationen gleichzeitig auf das erweiterte System $(A|E_2)$ angewandt werden: $(A|E_2) \rightsquigarrow (E_2|A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot(-4) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Also gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii.) Die darstellende Matrix $[\psi]$ von ψ ergibt sich, indem die Bildvektoren $\psi(e_1)$, $\psi(e_2)$, $\psi(e_3)$ der Standard-Basisvektoren e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$ in die jeweilige Spalte geschrieben werden (Satz 3.1.14):

$$[\psi] = \begin{array}{c} \begin{matrix} \scriptstyle\psi(e_1) & \scriptstyle\psi(e_2) & \scriptstyle\psi(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

iv.) Aus den Vorgaben für f auf der Basis (e_1, e_2) des $\mathbb{R}^2$ ergibt sich direkt als allgemeine Abbildungsvorschrift für f:

$$f\big((x,y)\big) = f\big(x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)\big) = x \cdot (1,1) + y \cdot (1,1) = (x+y,\, x+y).$$

Die Abbildung g kann konstruiert werden durch die Festlegung $(1,1) \mapsto (0,0)$ und $(1,0) \mapsto (1,2)$ auf der Basis $\big((1,1),\, (1,0)\big)$ des $\mathbb{R}^2$.

Wegen $(0,1) = (1,1) - (1,0)$ ergibt sich $g\big((0,1)\big) = (-1,-2)$ und insgesamt:

$$g\big((x,y)\big) = g\big(x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)\big) = x \cdot (1,2) + y \cdot (-1,-2) = (x-y, 2x-2y).$$

Insbesondere gilt $g\big((x,y)\big) = (0,0) \iff x = y$, und somit wie verlangt:

$$\ker(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

Ebenso folgt aus der Konstruktion $(1,2) \in \operatorname{im}(g)$.

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei $\varphi\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus des endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Beweisen Sie:

$$\varphi \text{ injektiv} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \text{ surjektiv}.$$

ii.) (2P) Beweisen Sie, daß jede endliche Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

iii.) (3P) Beweisen Sie, daß $(3,5)$ zwar ein minimales Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$ ist, aber keine Basis.

Lösung:

i.) Ist φ injektiv, so gilt $\ker(\varphi) = \{0\}$ nach 2.1.27 und somit $\dim_K\big(\ker(\varphi)\big) = 0$. Aus der Dimensionsformel 2.2.56 folgt damit $\dim_K\big(\operatorname{im}(\varphi)\big) = \dim_K(V)$. Da $\operatorname{im}(\varphi)$ ein Untervektorraum von V ist, liefert dies $\operatorname{im}(\varphi) = V$ nach 2.2.53. Damit ist φ surjektiv.

ii.) Sei $|G| = p$ eine Primzahl, und sei $g \in G$ mit $g \neq e_G$. Dann ist $\langle\, g\,\rangle \subseteq G$ eine Untergruppe mit mehr als einem Element. Da die Anzahl der Elemente einer Untergruppe nach dem Satz von Lagrange ein Teiler der Gruppenordnug p sein muss und p eine Primzahl ist, kann nur $|\langle\, g\,\rangle| = p$ gelten. Damit ist $G = \langle\, g\,\rangle$ und G eine zyklische Gruppe.

iii.) Es gilt $1 = 2\cdot 5 - 3\cdot 3$, und daher ist $(3,5)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}$. Offensichtlich ist dieses minimal, da (3) und (5) keine Erzeugendensysteme von $\mathbb{Z}$ sind. Das System $(3,5)$ ist aber keine Basis von $\mathbb{Z}$, da es nicht linear unabhängig ist, denn es existiert zum Beispiel folgende nicht-triviale Linearkombination der Null: $\quad 5\cdot 3 - 3\cdot 5 = 0.$