**Klausur zur Linearen Algebra I HS 2012, 12.12.2012**
**Universität Mannheim, Dr. Ralf Kurbel, Dr. Harald Baum**

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

**Viel Erfolg!**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 1** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (1P) Formulieren Sie den Satz von Lagrange für endliche Gruppen.

ii.) (2P) Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Geben Sie vier äquivalente Bedingungen dafür an, daß ein System $(x_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus $V$ eine Basis von $V$ ist.

iii.) (2P) Definieren Sie, wann eine Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow W$ zwischen den $K$-Vektorräumen $V$ und $W$ linear ist und deren Kern.

iv.) (1P) Formulieren Sie den Rangsatz (bzw. die Dimensionsformel) für die lineare Abbildungen $\varphi\colon V \longrightarrow W$ zwischen den endlichdimensionalen $K$-Vektorräumen $V$ und $W$.

v.) (2P) Sei $\varphi\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen den $K$-Vektorräumen $V$ und $W$ und $(x_i)_{i \in I}$ eine Basis von $V$. Geben Sie jeweils eine Bedingung für das System $(\varphi(x_i))_{i \in I}$ an, so daß $\varphi$ injektiv ist bzw. surjektiv ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 2** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Sei $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie zu der folgenden Äquivalenzrelation auf $A$ alle Äquivalenzklassen an:

$$R := \{(a, a) \mid a \in A\} \cup \big\{(1, 2), (2, 1), (4, 3), (3, 4), (1, 5), (5, 1), (2, 5), (5, 2)\big\}.$$

ii.) (1P) Definieren Sie die Permutationsgruppe $S_n$.

iii.) (2P) Schreiben Sie die folgenden Permutationen aus $S_8$ in Zykelschreibweise mit disjunkten Trägern:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \pi := (3\,1\,8)(5\,1\,8)(7\,4\,6)(1\,2\,3\,4)(3\,5\,6\,8\,2).$$

iv.) (1P) Geben Sie ein Element $\sigma \in S_7$ an mit $ord(\sigma) = 12$.

v.) (2P) Zeigen Sie, daß die zyklische Untergruppe $U := \langle\, (1\,3\,6\,7)\,\rangle \subseteq S_7$ kein Normalteiler von $S_7$ ist.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 3** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Bestimmen Sie für folgende Restklassen aus $\mathbb{Z}_8$ jeweils $b$ mit $0 \leq b < 8$:

$$[b]_8 = [2]_8 \cdot [5]_8 + [22]_8 \cdot [23]_8 \in \mathbb{Z}_8 \quad \text{und} \quad [b]_8 = [28]_8 \cdot \big([19]_8 + [27]_8\big) \in \mathbb{Z}_8.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{Z}_7$ zu jedem $x \in \mathbb{Z}_7^*$ sein multiplikatives Inverses.

iii.) (2P) Im folgenden sind Paare von Gruppen angegeben, die jeweils nicht zueinander isomorph sind. Geben Sie jeweils eine Eigenschaft an, bzgl. der sich die Gruppen strukturell unterscheiden:

$$\mathbb{Z} \text{ und } \mathbb{Z}_{60}, \qquad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \text{ und } \mathbb{Z}_8, \qquad \langle\,(1\,2)(3\,4)\,\rangle \subseteq S_4 \text{ und } \langle\,[2]_6\,\rangle \subseteq \mathbb{Z}_6.$$

iv.) (2P) Zeigen Sie, daß keine Gruppenhomomorphismen der folgenden Art existieren können:

a.) Ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von $S_4$ nach $\mathbb{Z}_5$.

b.) Ein injektiver Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}_4$ nach $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 4** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

i.) (4P) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Az = b$ mit:

$$z \in \mathbb{R}^{[4]} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{[3]}.$$

ii.) (4P) Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung:

$$\varphi_A : \mathbb{R}^{[4]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]} \quad \text{mit} \quad x \mapsto A \cdot x.$$

Matrikelnummer:

Name: Sitzplatz:

**Aufgabe 5** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (2P) Geben Sie im $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $\mathcal{P}\big(\{1,2,3\}\big)$ die Koordinaten der folgenden Vektoren $v_1$ und $v_2$ bzgl. der Basis $\big(\{3\},\{1,2\},\{1,3\}\big)$ an:

$$v_1 := \{1,2,3\} \quad \text{und} \quad v_2 := \{2,3\}.$$

ii.) (2P) Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{R})$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

iii.) (1P) Geben Sie zu der folgenden linearen Abbildung $\psi$ die darstellende Matrix $[\psi]$ an:

$$\psi\colon \mathbb{R}^{[3]} \longrightarrow \mathbb{R}^{[3]} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-3y+5z \\ 4y-3z \\ 2x-z \end{pmatrix}.$$

iv.) (3P) Geben Sie vollständige Abbildungsvorschriften für lineare Abbildungen an, die folgende Bedingungen erfüllen:

a.) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(1,0)\mapsto(1,1)$ und $(0,1)\mapsto(1,1)$.

b.) $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\ker(g) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$ und $(1,2)\in\mathrm{im}(g)$.

Matrikelnummer:

**Aufgabe 6** (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

i.) (3P) Sei $\varphi\colon V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus des endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Beweisen Sie:

$$\varphi \text{ injektiv} \quad \Longrightarrow \quad \varphi \text{ surjektiv}.$$

ii.) (2P) Beweisen Sie, daß jede endliche Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

iii.) (3P) Beweisen Sie, daß $(3,5)$ zwar ein minimales Erzeugendensystem des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{Z}$ ist, aber keine Basis.