

## Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. (4 Punkte) (Berechnung von oberen und unteren Schranken)

In Aufgabe 3 von Blatt 8 waren BCH-Codes  $C_1$  und  $C_2$  im engeren Sinn der Länge  $n = 80$  über  $\mathbb{F}_3$  mit designierten Abständen  $\delta_1 = 4$  und  $\delta_2 = 7$  und geeignetem  $\alpha \in \mathbb{F}_{3^4} - \{0\}$  studiert worden. Nehmen Sie in beiden Fällen  $d(C_i) = \delta_i$  an (ohne zu versuchen, es zu beweisen).

Schätzen Sie mit Hilfe der Singleton-Schranke (Satz 9.1 und Satz 11.7), der Hamming-Schranke (Satz 11.8) und der Gilbert-Varshamov-Schranke (Satz 11.5) die Qualität dieser BCH-Codes ab.

Vorsicht: Bitte verwechseln Sie das  $\delta$  in Kapitel 11 (ein *relativer* Hamming-Abstand  $\in (0, 1]$ ) nicht mit dem  $\delta$  bei BCH-Codes (ein *designierter* Abstand).

2. (4 Punkte) Zeigen Sie

$$A_2(n, 2l - 1) = A_2(n + 1, 2l).$$

Hinweise: Die Idee der Ungleichung  $\leq$  steckt im Beweis von Lemma 2.11. Die andere Richtung läuft ähnlich ab. Beachten Sie, dass die Codes hier nicht unbedingt linear sind.

3. (4 Punkte) (Berechnung von oberen und unteren Schranken)

- (a) Berechnen Sie die (Singleton, Plotkin, Hamming, Gilbert-Varshamov)-Schranken für  $A_2(17, 8)$ .

Hinweise: Es ist  $V_2(17, 7) = 41226$  und  $V_2(17, 3) = 834$ . Beachten Sie, dass bei der Hamming-Schranke  $d$  ungerade sein muss. Führen Sie eine einfache Abschätzung durch, um sie dennoch nutzen zu können.

- (b) Was geschieht mit den (Singleton, Plotkin, Hamming, Gilbert-Varshamov)-Schranken für den Fall beliebig langer Codes und annähernd gleich bleibender Fehlerkorrekturleistung? Berechnen Sie dazu für die aufgeführten Schranken jeweils  $\alpha_2(\delta)$  mit  $\delta = 8/17$ .

*Bitte wenden!*

4. (2+1+1 Punkte) (Die Griesmer-Schranke)

Die Singleton-Schranke (Satz 9.1 und Satz 11.7) gibt für lineare Codes:  $n \geq d+k-1$ . Die Griesmer-Schranke gibt eine schärfere Abschätzung im Fall von binären Codes.

$N(k, d)$  ist definiert als die Länge der kürzesten, binären, linearen Codes mit Dimension  $k$  und Hamming-Abstand  $d$ .

(a) Es ist

$$N(k, d) \geq d + N(k-1, \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil)$$

und (Griesmer-Schranke)

$$N(k, d) \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{2^i} \right\rceil.$$

(Hinweis: Mit  $\lceil x \rceil$  wird die kleinste ganze Zahl  $\geq x$  bezeichnet, Beispiel:  $\lceil \frac{7}{2} \rceil = 4$ )

Folgern Sie die zweite aus der ersten Aussage. Die erste brauchen Sie nicht zu beweisen.

Warum ist die Griesmer-Schranke besser als die Singleton-Schranke  $N(k, d) \geq k + d - 1$ ?

- (b) Berechnen Sie damit eine untere Schranke für die Länge des kürzesten, 3-fehlerkorrigierenden, linearen Codes der Dimension 5 über  $\mathbb{F}_2$ .
- (c) Berechnen Sie eine untere Schranke für  $N(k, 2^{k-1})$ .