Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. *(4 Punkte)* (Vandermonde-Matrix) Beweisen Sie die folgende Formel.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Hinweise zu einem möglichen Lösungsweg: Man kann zuerst die erste Zeile von allen anderen Zeilen abziehen. Dann kann man nach Laplace die erste Zeile und die erste Spalte weglassen. Nun kann man wegen der Multilinearität der Determinante Faktoren $(x_j - x_1)$ aus den entsprechenden Zeilen herausziehen. Nun eine Rechnung, und dann Induktion.

2. *(0,5+1+0,5+1+0,5+0,5 Punkte)* Überprüfen Sie, ob die folgenden Codes (a) zyklisch oder (b) äquivalent zu einem zyklischen Code sind. Begründen Sie Ihre Antwort!

   (i) Der binäre Code $\{0000, 1100, 0110, 0011, 1001\}$,

   (ii) der ternäre (d.h. über $\mathbb{F}_3$) Code $\{0000, 1122, 2211\}$,

   (iii) der Wiederholungscode der Länge n über $\mathbb{F}_q$ mit $\mathrm{ggT}\,(n, q) = 1$,

   (iv) für ein n mit $\mathrm{ggT}\,(n, 2) = 1$ der binäre Code aller Wörter der Länge n mit geradem Gewicht,

   (v) für ein $n \geq 3$ mit $\mathrm{ggT}\,(n, 3) = 1$ der ternäre Code $\{x \in \mathbb{F}_3^n \mid w(x) \equiv 0 \ (mod\, 3)\}$,

   (vi) der ternäre Code $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_3^n | \sum_{i=0}^n x_i = 0\}$ mit $\mathrm{ggT}\,(n, 3) = 1$.

3. *(4 Punkte)*

   Geben Sie für alle zyklischen Codes der Länge 7 über $\mathbb{F}_2$ ihr Erzeugerpolynom, ihre Erzeugermatrix aus Satz 7.4 (b), ihre Kontrollmatrix aus Satz 7.4 (c) und ihre Dimension an. Hier soll auch (entgegen Definition 1.3) $C = \{0\}$ als ein Code aufgefasst werden.

   Hinweise: Beachten Sie Blatt 7 Aufgabe 4 (B7.4). Aber Aufgabe B7.4 und Aufgabe 3 können unabhängig voneinander gelöst werden. Aufgabe 3 erfordert nicht die Kenntnis der Nullstellen der irreduziblen Faktoren von $t^7 - 1 \in \mathbb{F}_2[t]$, sondern die Kenntnis aller (auch der reduziblen) Teiler von $t^7 - 1$.

4. *(3+1 Punkte)* Aus Aufgabe 3 kennen Sie den zyklischen Code $C \subset \mathbb{F}_2^3$ mit Erzeugerpolynom $g(t) = (t + 1)(t^3 + t + 1)$.

   (a) Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 7.5 (b) (und mit Hilfe von Aufgabe 4 von Blatt 7) eine Kontrollmatrix von C.

   (b) Vergleichen Sie diese Kontrollmatrix mit der aus Aufgabe 3 (also der aus Satz 7.4 (c)). Zeigen Sie explizit, dass sie den gleichen Code liefern.

Abgabe am Montag, den 23. April 2012, in der Übung