Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Blatt 6
19.03.2012

Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. *(6 Punkte)* Die folgende Aufgabe soll den ersten Beweis für $d(\mathcal{R}(r,m)) \geq 2^{m-r}$ illustrieren (vgl. Vorlesung Bemerkungen 5.6 (iv)–(vii)).
   Seien $m = 4$, $M = \{1,2,3,4\}$, $J = \{1,2\}$, $J^C = M - J = \{3,4\}$, $P_{J,(1,1,1,1)} = z_1 z_2$ sowie $f := z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1$ eine "Störung" von $z_1 z_2$. Die Träger von

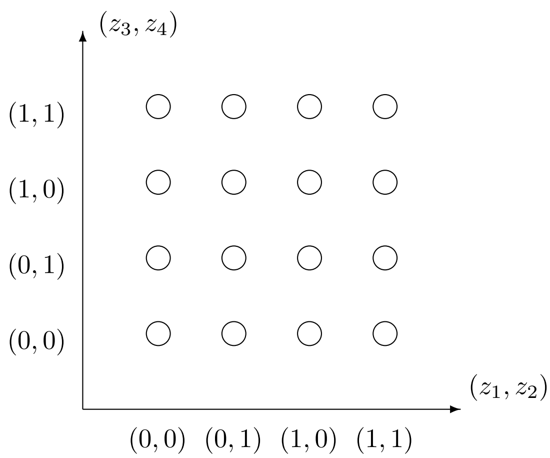
   (i) $z_1 z_2$,

   (ii) $z_2 z_3$,

   (iii) z_1,

   (iv) f

   sollen graphisch dargestellt werden. Verwenden Sie dazu jeweils ein Schaubild wie folgt:



   Markieren Sie die Träger, indem Sie die entsprechenden Kreise schwarz ausmalen. (Es reichen jeweils Kopien der 16 Kreise. Die Koordinatenachsen und die Werte an den Achsen müssen Sie nicht jedesmal kopieren.)

   Machen Sie sich klar, daß die Spalte ganz links für S_J steht und die Zeile ganz unten für S_{J^C}. Geben Sie die 4 Zahlen $|\mathrm{Supp}(f) \cap (S_{J^C} + t)|$ für $t \in S_J$ an. Welche Eigenschaft dieser 4 Zahlen ist entscheidend für den Beweis in Bemerkung 5.6 (vii) der Vorlesung, daß $|\mathrm{Supp}(f)| \geq 2^{m-r}$ ist?

Bitte wenden!

2. *(10 Punkte)* In dieser Aufgabe sollen Sie die Dekodierung von Reed-Muller-Codes nach Satz 5.7 an einem Beispiel durchführen. Dabei sollen die Elemente von $\mathrm{Abb}\,(\mathbb{F}_2^4, \mathbb{F}_2)$ wieder wie in Aufgabe 1 dargestellt werden, nämlich durch Ausfüllen von den Kreisen im Bild von Aufgabe 1, Wert $0 \sim$ leerer Kreis, Wert $1 \sim$ ausgefüllter Kreis.

   Die Abbildung $g \in \mathrm{Abb}\,(\mathbb{F}_2^4, \mathbb{F}_2)$ sei gegeben durch das Diagramm

   ○ ● ● ●
   ○ ○ ● ●
   ○ ○ ● ○
   ○ ○ ● ○

   Es ist $g = f + e$ für ein $f \in \mathcal{R}(2,4)$ und ein e mit $w(e) = 1$. Also ist Satz 5.7 mit $m = 4$ und $r = 2$ anwendbar.

   (a) $M = \{1,2,3,4\}$ hat die 6 Teilmengen mit 2 Elementen $I = \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$. Es ist jeweils $|S_I| = 4$. Skizzieren Sie für jede dieser 6 Mengen in einem Diagramm mit 16 Kreisen wie in Aufgabe 2 die 4 (natürlich disjunkten) Träger $S_{I^C} + t$, $t \in S_I$.

   (b) Berechnen Sie für jedes I wie in (a) die 4 Werte $< g, P_{I^C,t} > \in \mathbb{F}_2$ mit $t \in S_I$ und bestimmen Sie so nach Satz 5.7 die m_I mit $|I| = 2$ in

   $$f = \sum_{I \subset M, |I| \le 2} m_I P_{I,(1,1,1,1)}.$$

   (c) Wie (a), aber für $I = \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$. Nun ist $|S_I| = 8$.

   (d) Nun arbeitet man mit $r - 1 = 1$ statt $r = 2$ und mit

   $$\widetilde{g} := g + \sum_{I \subset M, |I| = 2} m_I P_{I,(1,1,1,1)}$$

   anstelle von g: es erfüllt $\widetilde{g} = \widetilde{f} + e$ mit

   $$\widetilde{f} = f + \sum_{I \subset M, |I| = 2} m_I P_{I,(1,1,1,1)} = \sum_{I \subset M, |I| \le 1} m_I P_{I,(1,1,1,1)} \in \mathcal{R}(1,4).$$

   Malen Sie in einem Diagramm mit 16 Kreisen wie oben den Träger von $\widetilde{g}$ ein. Berechnen Sie für jedes I wie in (c) die 8 Werte $< g, P_{I^C,t} > \in \mathbb{F}_2$ und bestimmen Sie so nach Satz 5.7 (mit $t \in S_I$) die m_I mit $|I| = 1$.

   (e) Es bleibt der konstante Term $m_\emptyset$ zu bestimmen. Gehen Sie analog zu (a)+(b) und (c)+(d) vor.

Abgabe am Montag, den 26. März 2012, in der Übung.