Übungsaufgaben zur Kodierungstheorie

1. *(2+1 Punkte)*
   (a) Es sei H die Kontrollmatrix eines linearen Codes mit $d(\mathcal{C}) \geq 3$. Zeigen Sie, dass die Spalten von H alle verschieden und alle $\neq 0$ sind.
   (b) Finden Sie damit einen einfachen Algorithmus zur Fehlerkorrektur.

2. *(2 Punkte)* Sei $\mathcal{C}$ ein linearer $[n, k]$-Code über $\mathbb{F}_q$. Zeigen Sie: Eine $k \times n$-Matrix G ist eine Erzeugermatrix für $\mathcal{C}$, genau dann wenn gilt:
$$\mathcal{C} = \{uG \mid u \in \mathbb{F}_q^k\}.$$

3. *(3+1+2 Punkte)* Gegeben sei ein linearer [7,4]-Code $\mathcal{C}$ über $\mathbb{F}_2$. Die Erzeugermatrix G ist
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Der Code hat eine Erzeugermatrix G' in Standardform. Berechnen Sie G' sowie die Kontrollmatrix in Standardform. Wie groß ist der Hamming-Abstand (ohne Beweis)? Wie viele (Übertragungs-)Fehler kann dieser Code korrigieren?
   (b) Kodieren Sie folgende Wörter mit der "Standardkodierungsregel" $a \mapsto a \cdot G$ jeweils mit den Erzeugermatrizen G und G': (1111), (0101), (1001).
   (c) Überprüfen Sie, ob folgende Wörter im Code enthalten sind: (1101011), (1101001), (0101010). Nehmen Sie hierzu an, dass die Wörter mit G' codiert worden sind.

4. *(1+4 Punkte)* Sei $\mathcal{C}$ ein $[5, 3]$-Code über $\mathbb{F}_2$ mit Kontrollmatrix
$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Wählen Sie eine Erzeugermatrix G von $\mathcal{C}$. Nutzen Sie dabei die Informationen, welche Ihnen die Beziehung $H \cdot x^t = 0$ liefert, aus!
   (b) Bestimmen Sie Nebenklassenführer und die zugehörigen Syndrome von $\mathcal{C}$. Dekodieren Sie damit das empfangene Wort (10011). Erhält man auch mit einer maximum-likelihood Dekodierung ein eindeutiges Ergebnis? (Begründung)

Abgabe am Montag, den 27 Februar 2012, in der Übung