Aufgaben und Lösungen für die
Zweite Klausur zur Spieltheorie im HWS 2011, 06.02.2012
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6	$\sum$

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(i) (1P) Geben Sie die Definition für eine *dominante Strategie* bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform an.
(ii) (1P) Geben Sie die Definition für ein *Nash-Gleichgewicht* bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform an.
(iii) (1P) Gegeben ist ein Spiel in Normalform $(\mathcal{A}, S, U)$ mit S^i kompakt für alle $i \in \mathcal{A}$ und mit $U : S \to \mathbb{R}^m$ stetig. Geben Sie die Definition der *beste-Antwort-Abbildung* r^i des Spielers $i \in \mathcal{A}$.
(iv) (1P) Es seien X und Y nichtleere Mengen, und $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Definieren Sie, wann ein Punkt $(x^0, y^0) \in X \times Y$ ein *Sattelpunkt* von f ist.
(v) (1P) Gegeben sind eine nichtleere Menge $\mathcal{Z}$ von Spielzügen und ein Spielbaum $\mathcal{B}$. Jeder Spielstand $\alpha \in \mathcal{B}$ hat eine Länge $l(\alpha) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$. Definieren Sie die Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ der *terminalen Spielzüge*.
(vi) (1P) Gegeben sind eine nichtleere Menge $\mathcal{Z}$ von Spielzügen, ein Spielbaum $\mathcal{B}$ und eine Menge $\mathcal{A} = \{1, ..., m\}$ von Spielern. Definieren Sie ein Spiel $(\mathcal{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ in extensiver Form, ohne Zufall und mit perfekter Information, d.h. definieren Sie $\mathcal{P}$ und ${}_eU$.
(vii) (1P) Geben Sie die Definition des *Kerns* eines kooperativen Spiels an.
(viii) (1P) Definieren Sie, wann ein kooperatives Spiel $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ *konvex* ist.

Lösung:

(i) Bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform ist eine dominante Strategie des Spielers $i \in \mathcal{A}$ eine Strategie $s_0^i \in S^i$ mit:

$$\forall\ s \in S \quad U^i(\sigma_i(s_0^i, s^{-i})) \geq U^i(s).$$

(ii) Bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform ist ein Nash-Gleichgewicht eine Strategienkombination $s_0 \in S$ mit:

$$\forall\ i \in \mathcal{A} \quad \forall\ s^i \in S^i \quad U^i(s_0) \geq U^i(\sigma_i(s^i, s_0^{-i})).$$

(iii) Die beste-Antwort-Abbildung r^i des Spielers i ist die Abbildung

$$r^i : S^{-i} \to \mathcal{P}(S^i), \quad r^i(s^{-i}) := \{s_0^i \in S^i \,|\, \forall\ s^i \in S^i \quad U^i(\sigma_i(s_0^i, s^{-i})) \geq U^i(s)\}.$$

(Die Bedingungen S^i kompakt und U stetig sorgen dafür, daß das Bild nicht leer ist.)

(iv)

$$\forall\ (x, y) \in X \times Y \quad f(x, y^0) \leq f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y).$$

(v)

$$\mathcal{F} = \{\alpha \in \mathcal{B} \,|\, l(\alpha) = \infty\} \cup \{\alpha \in \mathcal{B} \,|\, l(\alpha) < \infty \text{ und } \nexists\ z \in \mathcal{Z} \text{ mit } (\alpha, z) \in \mathcal{B}\}.$$

(vi) $\mathcal{P}$ ist eine Abbildung $\mathcal{P} : \mathcal{B} - \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ mit $\mathcal{P}^{-1}(i) \neq \emptyset\ \forall\ i \in \mathcal{A}$. $\mathcal{P}(\alpha)$ ist der Spieler, der nach dem Spielstand α dran ist, einen Spielzug auszuführen.
${}_eU$ ist eine Abbildung ${}_eU : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^m$, die Auszahlungsabbildung. ${}_eU^i : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ist die Auszahlungsfunktion des Spielers i.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

(vii) Der Kern eines kooperativen Spiels $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ ist die Menge

$$\mathcal{K} = \{z \in \mathcal{Z} \,|\, \forall\ B \subset \mathcal{A} \quad \sum_{i \in B} z_i \geq \mathcal{V}(B)\}.$$

(viii) Ein kooperatives Spiel $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ ist konvex, falls gilt:

$$\forall\ B, C \subset \mathcal{P}(\mathcal{A}) \quad \mathcal{V}(B) + \mathcal{V}(B) \leq \mathcal{V}(B \cup C) + \mathcal{V}(B \cap C).$$

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (4P) Hier ist die Auszahlungsmatrix zu einem 2-Personenspiel in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 3$,

	s_1^2	s_2^2	s_3^2
s_1^1	(1,1)	(2,2)	(0,3)
s_2^1	(2,2)	(3,0)	(1,1)
s_3^1	(1,1)	(1,1)	(2,2)

Geben Sie für jeden Spieler alle maximin-Strategien und alle dominanten Strategien an, und geben Sie alle Gleichgewichte in dominanten Strategien und alle Nash-Gleichgewichte an. Begründungen sind nicht nötig.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

(Fortsetzung Aufgabe 2)

(b) (4P) Gegeben sind 2 Spiele $(\mathcal{A}, S_\alpha, U_\alpha)$ für $\alpha \in \{I, II\}$ mit

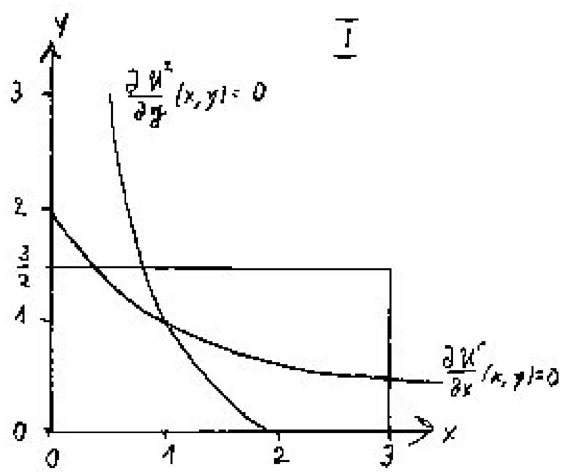
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{1,2\}, \\ S_\alpha &= S_\alpha^1 \times S_\alpha^2 = [0, x_\alpha] \times [0, y_\alpha], \\ (x_I, x_{II}, y_I, y_{II}) &= (3, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}), \\ U_\alpha^i &= U^i_{|S_\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha \in \{I, II\} \text{ und } i \in \{1,2\}. \end{aligned}$$

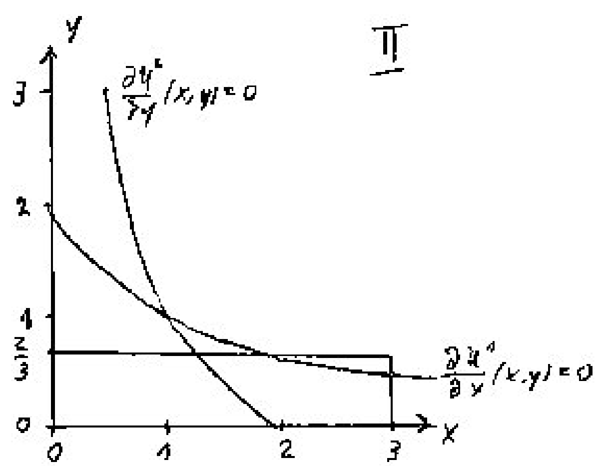
Hier sind U^i zweimal stetig differenzierbare Funktionen $U^i : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit (die Koordinaten auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ werden (x, y) genannt)

$$\frac{\partial^2 U^1}{\partial x^2}(x,y) < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 U^2}{\partial y^2}(x,y) < 0 \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0},$$

$$\frac{\partial U^1}{\partial x}(x,y) = 0 \iff y = \frac{2}{x+1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U^2}{\partial y}(x,y) = 0 \iff x = \frac{2}{y+1}.$$

Daher haben für jedes α die beste-Antwort-Abbildungen $r_\alpha^1 : S_\alpha^2 \to \mathcal{P}(S_\alpha^1)$ und $r_\alpha^2 : S_\alpha^1 \to \mathcal{P}(S_\alpha^2)$ 1-elementige Bilder, und es gibt Abbildungen $\widetilde{r}_\alpha^1 : S_\alpha^2 \to S_\alpha^1$ und $\widetilde{r}_\alpha^2 : S_\alpha^1 \to S_\alpha^2$ mit $r_\alpha^1(y) = \{\widetilde{r}_\alpha^1(y)\}$ und $r_\alpha^2(x) = \{\widetilde{r}_\alpha^2(y)\}$. Die Nash-Gleichgewichte des Spiels $(\mathcal{A}, S_\alpha, U_\alpha)$ sind die Schnittpunkte der Graphen von $\widetilde{r}_\alpha^1$ und $\widetilde{r}_\alpha^2$.
Tragen Sie in den 2 Bildern $\alpha \in \{I, II\}$ jeweils die Graphen von $\widetilde{r}_\alpha^1$ und $\widetilde{r}_\alpha^2$ ein, machen Sie ihre Schnittpunkte (durch Pfeile) kenntlich, und schreiben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte unter die Bilder.



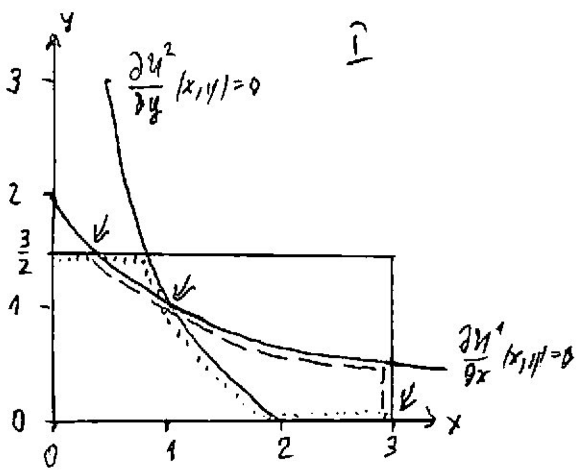


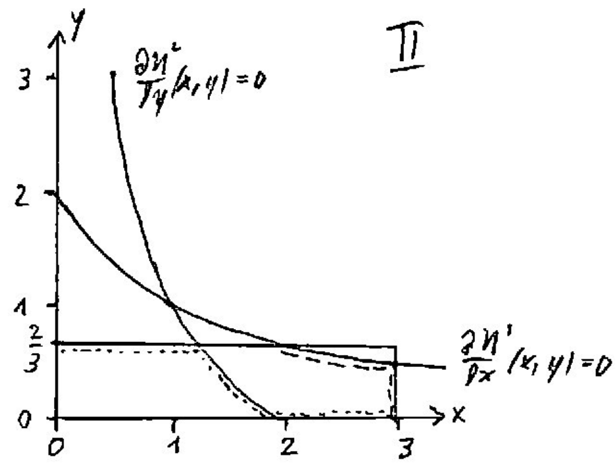
Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Lösung:

(a) maximin-Strategien des 1. Spielers: s_2^1, s_3^1.
maximin-Strategien des 2. Spielers: s_1^2, s_3^2.
dominante Strategie(n) des 1. Spielers: –
dominante Strategie(n) des 1. Spielers: –
Gleichgewicht(e) in dominanten Strategien: –
Nash-Gleichgewichte: (s_2^1, s_1^2), (s_3^1, s_3^2).

(b) .





---- Graph von $\tilde{r}^1_{I}$

...... Graph von $\tilde{r}^2_{I}$

3 Nash-Gleichgewichte:
$(3,0)$, $(1,1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})$

---- Graph von $\tilde{r}^1_{II}$

...... Graph von $\tilde{r}^2_{II}$

1 Nash-Gleichgewicht: $(3,0)$

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (4P) Erinnerung: Bei einem endlichen 2-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 2$ und mit Auszahlungsmatrix

$$\begin{pmatrix} (U^1_{11}, U^2_{11}) & (U^1_{12}, U^2_{12}) \\ (U^1_{21}, U^2_{21}) & (U^1_{22}, U^2_{22}) \end{pmatrix}$$

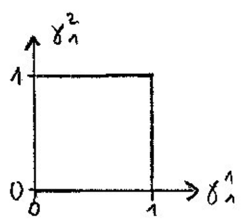
sind die Auszahlungsfunktionen V^1 und V^2 seiner gemischten Erweiterung

$$\begin{aligned} V^1 &= \kappa^1(g^2) + \lambda^1_1(g^2) \cdot \gamma^1_1 \quad \text{mit} \quad \lambda^1_1(g^2) = (U^1_{12} - U^1_{22}) + (U^1_{11} - U^1_{12} - U^1_{21} + U^1_{22}) \cdot \gamma^2_1, \\ V^2 &= \kappa^2(g^1) + \lambda^2_1(g^1) \cdot \gamma^2_1 \quad \text{mit} \quad \lambda^2_1(g^1) = (U^2_{21} - U^2_{22}) + (U^2_{11} - U^2_{21} - U^2_{12} + U^2_{22}) \cdot \gamma^1_1. \end{aligned}$$

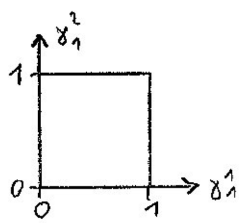
Berechnen Sie beim 2-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit der Auszahlungsmatrix

	s^2_1	s^2_2
s^1_1	(0,1)	(1,1)
s^1_2	(2,3)	(0,1)

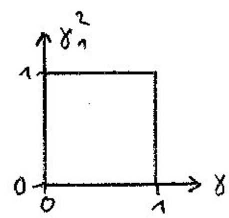
die (affin linearen) Funktionen $\lambda^1_1(g^2)$ und $\lambda^2_1(g^1)$, geben Sie die beste-Antwort-Abbildungen $r^1 : G^2 \to \mathcal{P}(G^1)$ und $r^2 : G^1 \to \mathcal{P}(G^2)$ der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$ und die Menge der Nash-Gleichgewichte der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$ an, und tragen Sie (zusätzlich) die Graphen der beste-Antwort-Abbildungen und der Nash-Gleichgewichte (der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$) hier ein:



Gr(r¹)



Gr(r²)



{Nash-Gleichgewichte}

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

(Fortsetzung Aufgabe 3)

(b) (4P) 2 Erdbeerfarmer können jeweils $y^i \in [0,8]$ kg Erdbeeren ernten. Ihre Kosten sind $2y^i$. Der Marktpreis pro kg ist $p(y^1, y^2) = 10 - (y^1 + y^2)$. Der Gewinn des Farmers $i \in \{1,2\}$ ist also

$$U^i(y^1, y^2) = p(y^1, y^2) \cdot y^i - 2y^i.$$

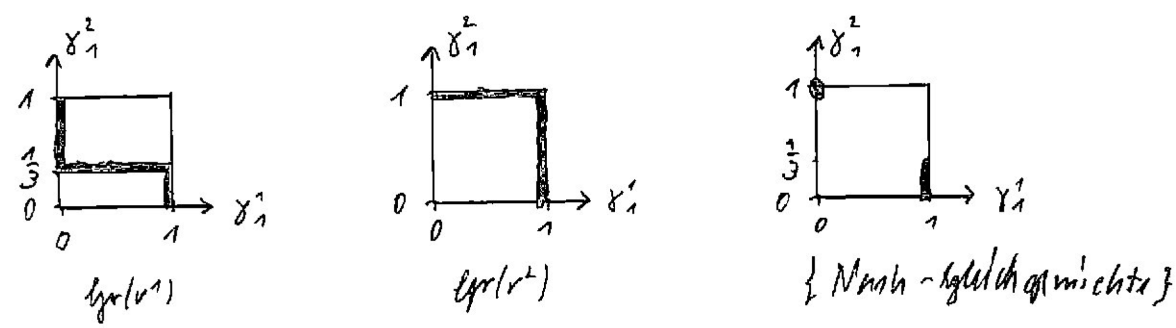
Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte des Spiels $(\mathcal{A}, S, U)$ mit

$$\mathcal{A} = \{1,2\}, \quad S^1 = S^2 = [0,8], \quad U = (U^1, U^2) \text{ wie oben.}$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\lambda_1^1(g^2) &= 1 - 3\gamma_1^2, \\
r^1(g^2) &= \begin{cases} \{s_1^1\} & \text{falls} \quad \gamma_1^2 < \frac{1}{3}, \\ G^1 & \text{falls} \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{3}, \\ \{s_2^1\} & \text{falls} \quad \gamma_1^2 > \frac{1}{3}, \end{cases} \\
\lambda_1^2(g^1) &= 2 - 2\gamma_1^1, \\
r^2(g^1) &= \begin{cases} \{s_1^2\} & \text{falls} \quad \gamma_1^1 < 1, \\ G^2 & \text{falls} \quad \gamma_1^1 = 1, \end{cases}, \\
\{\text{Nash-Gl.}\} &= \{(s_2^1, s_1^2)\} \cup \{(s_1^1, \gamma_1^2 \cdot s_1^2 + (1-\gamma_1^2) \cdot s_2^2) \,|\, \gamma_1^2 \in [0, \frac{1}{3}]\}.
\end{aligned}$$



(b) Ansatz, um die besten Antworten des Farmers 1 zu bestimmen:

$$\frac{\partial U^1}{\partial y^1} = 10 - 2y^1 - y^2 - 2,$$

also ist $y_0^1 := \frac{1}{2}(8 - y^2)$ zumindest ein lokales Extremum der Funktion $U^1(., y^2)$ auf $\mathbb{R}$. Wegen

$$\frac{\partial^2 U^1}{\partial^2 y^1} = -2 < 0$$

ist y_0^1 das einzige globale Maximum von $U^1(., y^2)$ auf $\mathbb{R}$. Für $y^2 \in S^2 = [0,8]$ ist es daher das einzige globale Maximum von $U^1(., y^2)$ auf $S^1 = [0,8]$. Daher ist y_0^1 für jedes $y^2 \in S^2$ die eindeutige beste Antwort des Spielers 1. Analog ist $y_0^2 = \frac{1}{2}(8 - y^1)$ für jedes $y^1 \in S^1$ die eindeutige beste Antwort des Spielers 2.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Daher ist $(y_1^1, y_1^2) \in S^1 \times S^2$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn gilt:

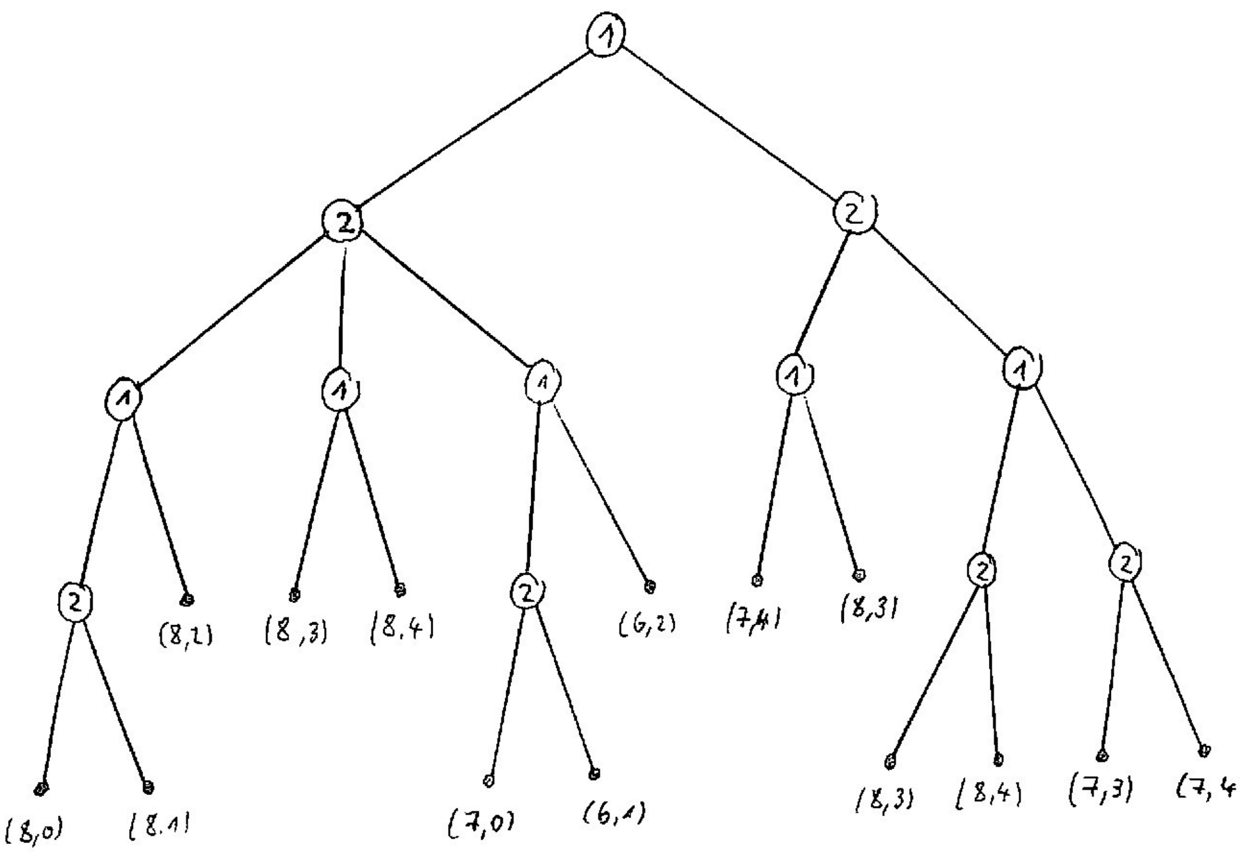
$$y_1^1 = \frac{1}{2}(8 - y_1^2), \quad y_1^2 = \frac{1}{2}(8 - y_1^1).$$

Auflösen des linearen Gleichungssystems liefert die eindeutige Lösung $(y_1^1, y_1^2) = (\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

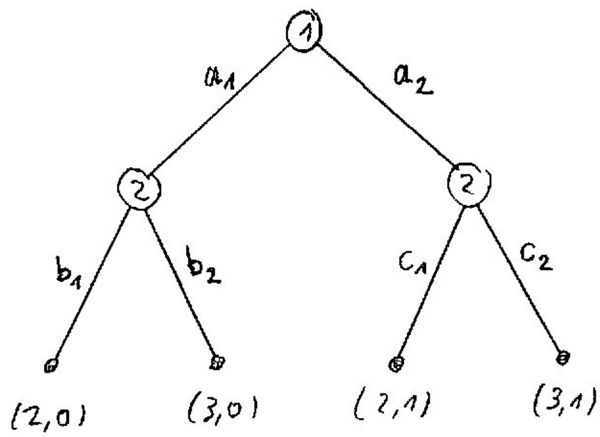
(a) (5P) Das folgende Bild zeigt den Spielbaum eines extensiven 2-Personenspiels ohne Zufall und mit perfekter Information. Zeichnen Sie alle Spielzüge dick, die mit Algorithmus 4.2.3 eindeutig gewählt werden, und zeichnen Sie alle Spielzüge gestrichelt dick, bei denen der jeweilige Spieler eine Wahl zwischen mehreren gleich guten Möglichkeiten hat.
Wieviele Teilspiel-perfekte Gleichgewichte gibt es? (Eine Begründung der Antwort ist nicht nötig.)
Geben Sie die Auszahlungswerte aller Teilspiel-perfekten Gleichgewichte an (eine Liste von Zahlenpaaren reicht; Sie müssen nicht die Teilspiel-perfekten Gleichgewichte zusammen mit ihren Auszahlungswerten auflisten).



Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

(Fortsetzung Aufgabe 4)

(b) (3P) Das folgende Bild zeigt den Spielbaum eines extensiven 2-Personenspiels ohne Zufall und mit perfekter Information.

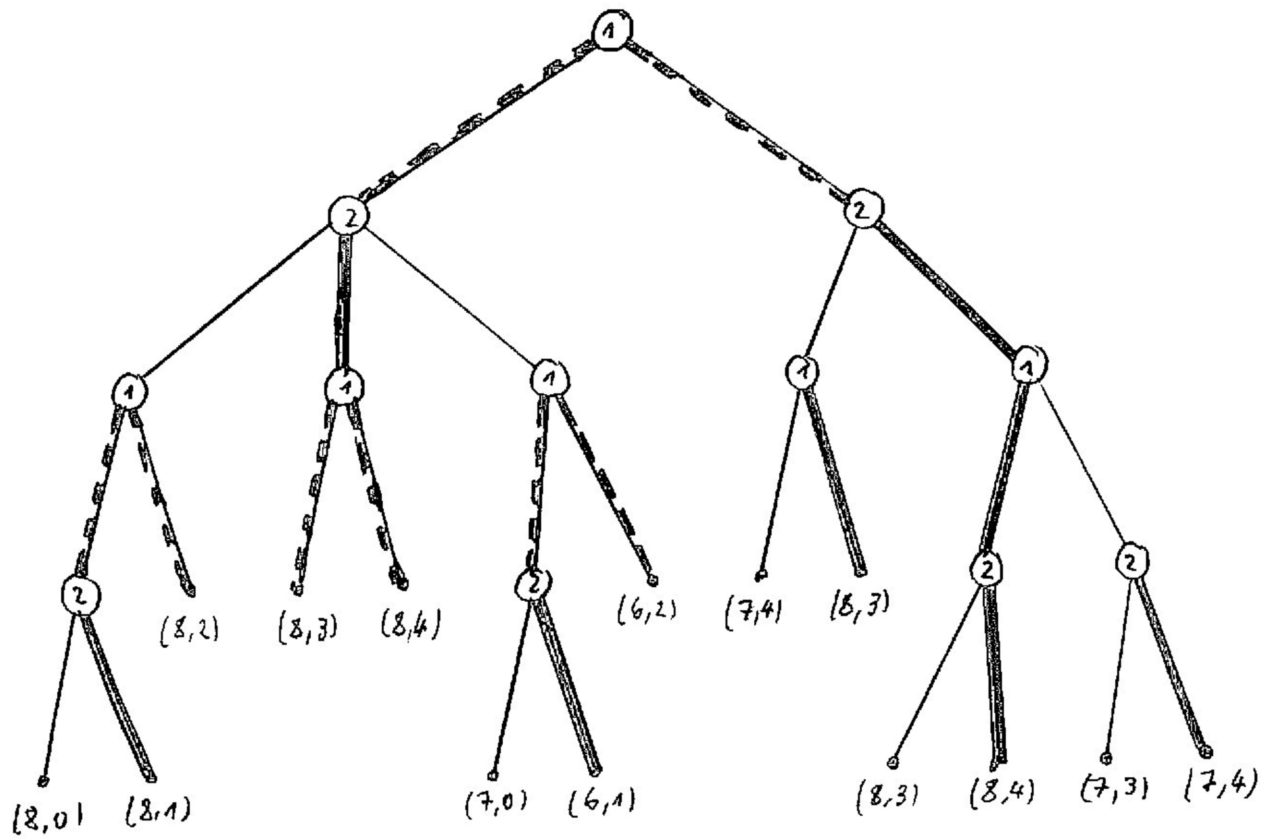


Listen Sie alle Teilspiel-perfekten Gleichgewichte und ihre Auszahlungswerte auf, in der Form $(a_i, b_j, c_k) : (.., ..)$ für geeignete $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Lösung:

(a) Anzahl der Teilspiel-perfekten Gleichgewichte: 16.
Auszahlungswerte der Teilspiel-perfekten Gleichgewichte: (8,3), (8,4).



(b)

$$
\begin{array}{lcl}
(a_1, b_1, c_1) & : & (2,0) \\
(a_2, b_1, c_1) & : & (2,1) \\
(a_1, b_2, c_1) & : & (3,0) \\
(a_2, b_1, c_2) & : & (3,1) \\
(a_1, b_2, c_2) & : & (3,0) \\
(a_2, b_2, c_2) & : & (3,1).
\end{array}
$$

Wichtig war, zu erkennen, daß (a_2, b_2, c_1) und (a_1, b_1, c_2) keine Teilspiel-perfekten Gleichgewichte sind.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

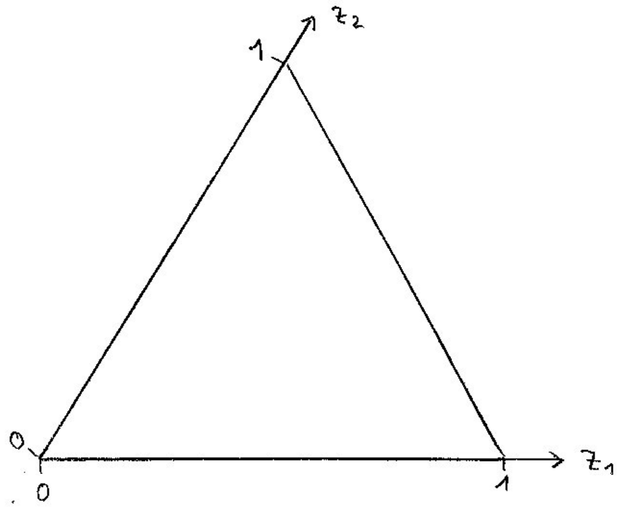
(a) (4P) Die folgende Tabelle zeigt die Koalitionsbewertung eines kooperativen 3-Personenspiels $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ in 0-1-reduzierter Form,

	$\emptyset$	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$\mathcal{V}(.)$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Ist das Spiel superadditiv? Ist es konvex? Begründen Sie Ihre Antworten. Die Menge der Zuteilungen ist hier

$$\mathcal{Z} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z_i \in [0, 1], z_1 + z_2 + z_3 = 1\}.$$

Sie ist bijektiv zum Simplex $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, z_1, z_2, z_1 + z_2 \in [0, 1]\}$, den das folgende Bild zeigt. Tragen Sie den Kern $\mathcal{K}$ des Spiels (genauer: sein Bild unter der Bijektion von $\mathcal{Z}$ auf den Simplex) in das Bild ein.



(b) (4P) Die folgende Tabelle zeigt die Koalitionsbewertung eines allgemeinen kooperativen 3-Personenspiels $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ in 0-1-reduzierter Form,

	$\emptyset$	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$\mathcal{V}(.)$	0	0	0	0	α_3	α_2	α_1	1

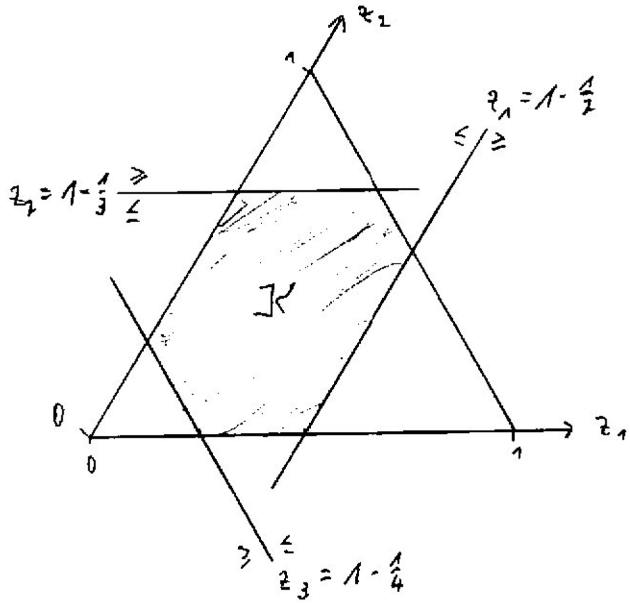
hier sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Das Spiel ist genau dann superadditiv, wenn $0 \le \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \le 1$ gilt.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Lösung:

(a) Das Spiel ist konvex, denn die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ erfüllen $0 \leq \alpha_i \leq 1$ und $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$, $\alpha_1 + \alpha_3 \leq 1$, $\alpha_2 + \alpha_3 \leq 1$. Weil es konvex ist, ist es auch superadditiv.



(b) Superadditivität ist die Bedingung:

$$\forall\ B, C \subset \mathcal{A} \text{ mit } B \cap C = \emptyset \text{ gilt } \quad \mathcal{V}(B) + \mathcal{V}(C) \leq \mathcal{V}(B \cup C).$$

In den 4 (sich überschneidenden) Fällen $B = \emptyset$, $C = \emptyset$, $B = \mathcal{A}$, $C = \mathcal{A}$ ist dies immer erfüllt. Es bleiben die folgenden 6 Fälle:

$$\begin{aligned}
0 + \alpha_3 &= \mathcal{V}(\{3\}) + \mathcal{V}(\{1,2\}) \overset{?}{\leq} \mathcal{V}(\mathcal{A}) = 1, \\
0 + \alpha_2 &= \mathcal{V}(\{2\}) + \mathcal{V}(\{1,3\}) \overset{?}{\leq} \mathcal{V}(\mathcal{A}) = 1, \\
0 + \alpha_1 &= \mathcal{V}(\{1\}) + \mathcal{V}(\{2,3\}) \overset{?}{\leq} \mathcal{V}(\mathcal{A}) = 1, \\
0 + 0 &= \mathcal{V}(\{2\}) + \mathcal{V}(\{3\}) \overset{?}{\leq} \mathcal{V}(\{2,3\}) = \alpha_1, \\
0 + 0 &= \mathcal{V}(\{1\}) + \mathcal{V}(\{3\}) \overset{?}{\leq} \mathcal{V}(\{1,3\}) = \alpha_2, \\
0 + 0 &= \mathcal{V}(\{1\}) + \mathcal{V}(\{2\}) \overset{?}{\leq} \mathcal{V}(\{1,2\}) = \alpha_3.
\end{aligned}$$

Die 6 Ungleichungen sind genau die Ungleichungen in der Behauptung.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

Sei $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ ein kooperatives Spiel. Erinnerung: Die Menge der Zuteilungen ist $\mathcal{Z}$, der Kern ist $\mathcal{K}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \{z \in \mathbb{R}^m \,|\, \sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}), \quad \forall\, i \in \mathcal{A} \quad z_i \geq \mathcal{V}(\{i\})\},\\ \mathcal{K} &= \{z \in \mathcal{Z} \,|\, \forall\, B \subset \mathcal{A} \quad \sum_{i\in B} z_i \geq \mathcal{V}(B)\}.\end{aligned}$$

Für jedes $\pi \in S_m$ wird der Vektor $x^\pi \in \mathbb{R}^m$ so definiert:

$$x^\pi_{\pi(j)} := \mathcal{V}(\{\pi(1), ..., \pi(j)\}) - \mathcal{V}(\{\pi(1), ..., \pi(j-1)\}).$$

Sei nun $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ ein konvexes Spiel.

(a) (2P) Zeigen Sie: $\forall\, \pi \in S_m \quad x^\pi \in \mathcal{Z}$.

(b) (2P) Zeigen Sie: $\forall\, \pi \in S_m$, $\forall\, j \in \{1, ..., m\}$, $\forall\, C \subset \{\pi(1), ..., \pi(j-1)\}$

$$x^\pi_{\pi(j)} \geq \mathcal{V}(C \cup \{\pi(j)\}) - \mathcal{V}(C).$$

(c) (4P) Zeigen Sie: $\forall\, \pi \in S_m \quad x^\pi \in \mathcal{K}$.

Lösung:

(a)

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^\pi = \sum_{j=1}^{m} x^\pi_{\pi(j)} = (\text{Teleskop-Summe}) = \mathcal{V}(\mathcal{A}) - \mathcal{V}(\emptyset) = \mathcal{V}(\mathcal{A}),$$

Konvexität $\Rightarrow x^\pi_{\pi(j)} = \mathcal{V}(\{\pi(1), ..., \pi(j)\}) - \mathcal{V}(\{\pi(1), ..., \pi(j-1)\}) \geq V(\{\pi(j)\})$.

Daraus folgt $x^\pi \in \mathcal{Z}$.

(b) Aus der Konvexität folgt

$$\mathcal{V}(C \cup \{\pi(j)\}) + \mathcal{V}(\{\pi(1), ..., \pi(j-1)\}) \leq \mathcal{V}(\{\pi(1), ..., \pi(j)\}) + \mathcal{V}(C).$$

Daraus folgt die Behauptung.

(c) Für ein $B \subset \mathcal{A}$ sei $\pi^{-1}(B) = \{j_1, ..., j_s\}$ mit $j_1 < ... < j_s$ (und $s \geq 0$).

$$\begin{aligned}\sum_{i\in B} x_i^\pi &= \sum_{j\in\pi^{-1}(B)} x^\pi_{\pi(j)} = \sum_{i=1}^{s} x^\pi_{\pi(j_i)}\\ &\geq \sum_{i=1}^{s} \big(\mathcal{V}(\{\pi(j_1), ..., \pi(j_i)\}) - \mathcal{V}(\{\pi(j_1), ..., \pi(j_{i-1})\})\big)\\ &= (\text{Teleskop-Summe}) = \mathcal{V}(B) - \mathcal{V}(\emptyset) = \mathcal{V}(B).\end{aligned}$$

Die Ungleichung in der 2. Zeile benutzt Teil (b) mit $j = j_i$ und $C = \{\pi(j_1), ..., \pi(j_{i-1})\}$.