



Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

---

**Aufgabe 1** (insgesamt 8 Punkte)

erreicht:

- (i) (1P) Geben Sie die Definition für eine *dominante Strategie* bei einem Spiel  $(\mathcal{A}, S, U)$  in Normalform an.
- (ii) (1P) Geben Sie die Definition für ein *Nash-Gleichgewicht* bei einem Spiel  $(\mathcal{A}, S, U)$  in Normalform an.
- (iii) (1P) Gegeben ist ein Spiel in Normalform  $(\mathcal{A}, S, U)$  mit  $S^i$  kompakt für alle  $i \in \mathcal{A}$  und mit  $U : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  stetig. Geben Sie die Definition der *beste-Antwort-Abbildung*  $r^i$  des Spielers  $i \in \mathcal{A}$ .
- (iv) (1P) Es seien  $X$  und  $Y$  nichtleere Mengen, und  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine Funktion. Definieren Sie, wann ein Punkt  $(x^0, y^0) \in X \times Y$  ein *Sattelpunkt* von  $f$  ist.
- (v) (1P) Gegeben sind eine nichtleere Menge  $\mathcal{Z}$  von Spielzügen und ein Spielbaum  $\mathcal{B}$ . Jeder Spielstand  $\alpha \in \mathcal{B}$  hat eine Länge  $l(\alpha) \in \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ . Definieren Sie die Teilmenge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$  der *terminalen Spielzüge*.
- (vi) (1P) Gegeben sind eine nichtleere Menge  $\mathcal{Z}$  von Spielzügen, ein Spielbaum  $\mathcal{B}$  und eine Menge  $\mathcal{A} = \{1, \dots, m\}$  von Spielern. Definieren Sie ein Spiel  $(\mathcal{A}, \mathcal{Z}, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_e U)$  in extensiver Form, ohne Zufall und mit perfekter Information, d.h. definieren Sie  $\mathcal{P}$  und  ${}_e U$ .
- (vii) (1P) Geben Sie die Definition des *Kerns* eines kooperativen Spiels an.
- (viii) (1P) Definieren Sie, wann ein kooperatives Spiel  $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$  *konvex* ist.

Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

---

**Aufgabe 2** (insgesamt 8 Punkte)

erreicht:

- (a) (4P) Hier ist die Auszahlungsmatrix zu einem 2-Personenspiel in Normalform mit  $|S^1| = |S^2| = 3$ ,

	$s_1^2$	$s_2^2$	$s_3^2$
$s_1^1$	(1,1)	(2,2)	(0,3)
$s_2^1$	(2,2)	(3,0)	(1,1)
$s_3^1$	(1,1)	(1,1)	(2,2)

Geben Sie für jeden Spieler alle maximin-Strategien und alle dominanten Strategien an, und geben Sie alle Gleichgewichte in dominanten Strategien und alle Nash-Gleichgewichte an. Begründungen sind nicht nötig.

Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

(Fortsetzung Aufgabe 2)

(b) (4P) Gegeben sind 2 Spiele  $(\mathcal{A}, S_\alpha, U_\alpha)$  für  $\alpha \in \{I, II\}$  mit

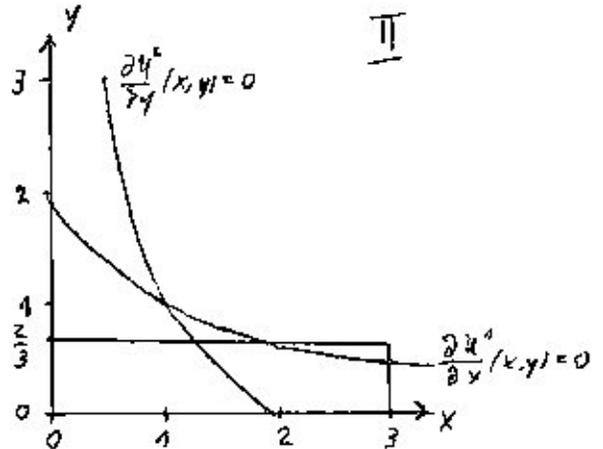
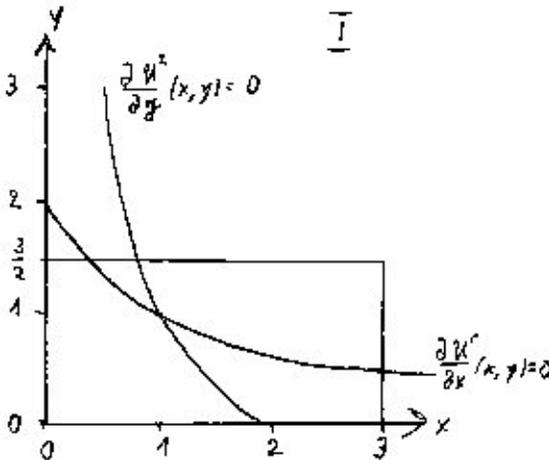
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{1, 2\}, \\ S_\alpha &= S_\alpha^1 \times S_\alpha^2 = [0, x_\alpha] \times [0, y_\alpha], \\ (x_I, x_{II}, y_I, y_{II}) &= \left(3, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right), \\ U_\alpha^i &= U_{|S_\alpha}^i \quad \text{für } \alpha \in \{I, II\} \text{ und } i \in \{1, 2\}.\end{aligned}$$

Hier sind  $U^i$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $U^i : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit (die Koordinaten auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  werden  $(x, y)$  genannt)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U^1}{\partial x^2}(x, y) < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 U^2}{\partial y^2}(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \frac{\partial U^1}{\partial x}(x, y) = 0 \iff y = \frac{2}{x+1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial U^2}{\partial y}(x, y) = 0 \iff x = \frac{2}{y+1}.\end{aligned}$$

Daher haben für jedes  $\alpha$  die beste-Antwort-Abbildungen  $r_\alpha^1 : S_\alpha^2 \rightarrow \mathcal{P}(S_\alpha^1)$  und  $r_\alpha^2 : S_\alpha^1 \rightarrow \mathcal{P}(S_\alpha^2)$  1-elementige Bilder, und es gibt Abbildungen  $\tilde{r}_\alpha^1 : S_\alpha^2 \rightarrow S_\alpha^1$  und  $\tilde{r}_\alpha^2 : S_\alpha^1 \rightarrow S_\alpha^2$  mit  $r_\alpha^1(y) = \{\tilde{r}_\alpha^1(y)\}$  und  $r_\alpha^2(x) = \{\tilde{r}_\alpha^2(x)\}$ . Die Nash-Gleichgewichte des Spiels  $(\mathcal{A}, S_\alpha, U_\alpha)$  sind die Schnittpunkte der Graphen von  $\tilde{r}_\alpha^1$  und  $\tilde{r}_\alpha^2$ .

Tragen Sie in den 2 Bildern  $\alpha \in \{I, II\}$  jeweils die Graphen von  $\tilde{r}_\alpha^1$  und  $\tilde{r}_\alpha^2$  ein, machen Sie ihre Schnittpunkte (durch Pfeile) kenntlich, und schreiben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte unter die Bilder.



Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

**Aufgabe 3** (insgesamt 8 Punkte)

erreicht:

- (a) (4P) Erinnerung: Bei einem endlichen 2-Personenspiel  $(\mathcal{A}, S, U)$  in Normalform mit  $|S^1| = |S^2| = 2$  und mit Auszahlungsmatrix

$$\begin{pmatrix} (U_{11}^1, U_{11}^2) & (U_{12}^1, U_{12}^2) \\ (U_{21}^1, U_{21}^2) & (U_{22}^1, U_{22}^2) \end{pmatrix}$$

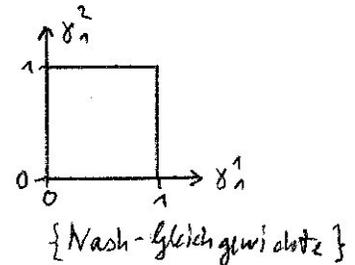
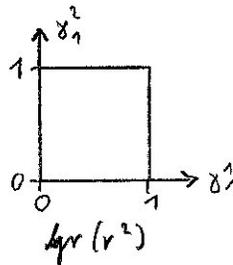
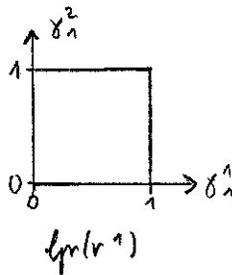
sind die Auszahlungsfunktionen  $V^1$  und  $V^2$  seiner gemischten Erweiterung

$$\begin{aligned} V^1 &= \kappa^1(g^2) + \lambda_1^1(g^2) \cdot \gamma_1^1 & \text{mit} & \quad \lambda_1^1(g^2) = (U_{12}^1 - U_{22}^1) + (U_{11}^1 - U_{12}^1 - U_{21}^1 + U_{22}^1) \cdot \gamma_1^2, \\ V^2 &= \kappa^2(g^1) + \lambda_1^2(g^1) \cdot \gamma_1^2 & \text{mit} & \quad \lambda_1^2(g^1) = (U_{21}^2 - U_{22}^2) + (U_{11}^2 - U_{21}^2 - U_{12}^2 + U_{22}^2) \cdot \gamma_1^1. \end{aligned}$$

Berechnen Sie beim 2-Personenspiel  $(\mathcal{A}, S, U)$  in Normalform mit der Auszahlungsmatrix

	$s_1^2$	$s_2^2$
$s_1^1$	(0,1)	(1,1)
$s_2^1$	(2,3)	(0,1)

die (affin linearen) Funktionen  $\lambda_1^1(g^2)$  und  $\lambda_1^2(g^1)$ , geben Sie die beste-Antwort-Abbildungen  $r^1 : G^2 \rightarrow \mathcal{P}(G^1)$  und  $r^2 : G^1 \rightarrow \mathcal{P}(G^2)$  der gemischten Erweiterung  $(\mathcal{A}, G, V)$  und die Menge der Nash-Gleichgewichte der gemischten Erweiterung  $(\mathcal{A}, G, V)$  an, und tragen Sie (zusätzlich) die Graphen der beste-Antwort-Abbildungen und der Nash-Gleichgewichte (der gemischten Erweiterung  $(\mathcal{A}, G, V)$ ) hier ein:



Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

---

**(Fortsetzung Aufgabe 3)**

- (b) (4P) 2 Erdbeerfarmer können jeweils  $y^i \in [0, 8]$  kg Erdbeeren ernten. Ihre Kosten sind  $2y^i$ . Der Marktpreis pro kg ist  $p(y^1, y^2) = 10 - (y^1 + y^2)$ . Der Gewinn des Farmers  $i \in \{1, 2\}$  ist also

$$U^i(y^1, y^2) = p(y^1, y^2) \cdot y^i - 2y^i.$$

Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte des Spiels  $(\mathcal{A}, S, U)$  mit

$$\mathcal{A} = \{1, 2\}, \quad S^1 = S^2 = [0, 8], \quad U = (U^1, U^2) \text{ wie oben.}$$

Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

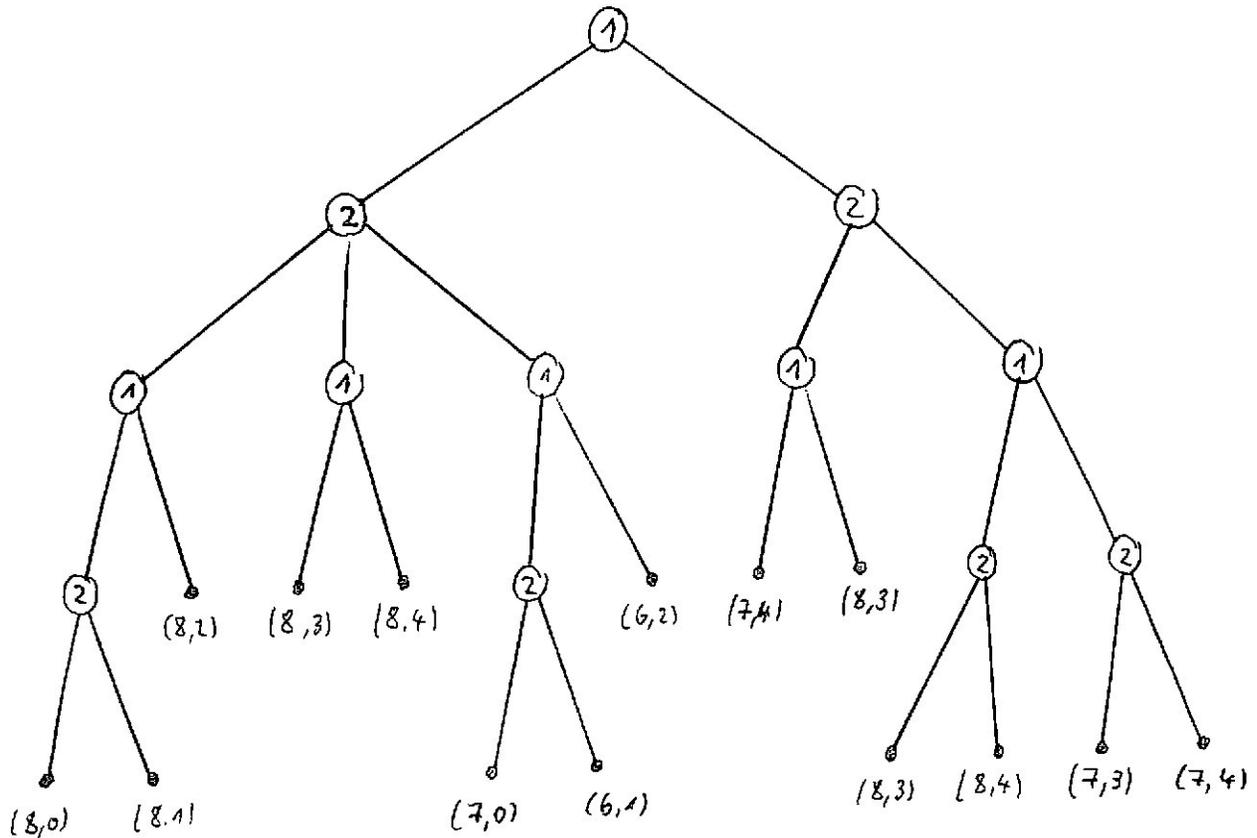
**Aufgabe 4** (insgesamt 8 Punkte)

erreicht:

- (a) (5P) Das folgende Bild zeigt den Spielbaum eines extensiven 2-Personenspiels ohne Zufall und mit perfekter Information. Zeichnen Sie alle Spielzüge dick, die mit Algorithmus 4.2.3 eindeutig gewählt werden, und zeichnen Sie alle Spielzüge gestrichelt dick, bei denen der jeweilige Spieler eine Wahl zwischen mehreren gleich guten Möglichkeiten hat.

Wieviele Teilspiel-perfekte Gleichgewichte gibt es? (Eine Begründung der Antwort ist nicht nötig.)

Geben Sie die Auszahlungswerte aller Teilspiel-perfekten Gleichgewichte an (eine Liste von Zahlenpaaren reicht; Sie müssen nicht die Teilspiel-perfekten Gleichgewichte zusammen mit ihren Auszahlungswerten auflisten).



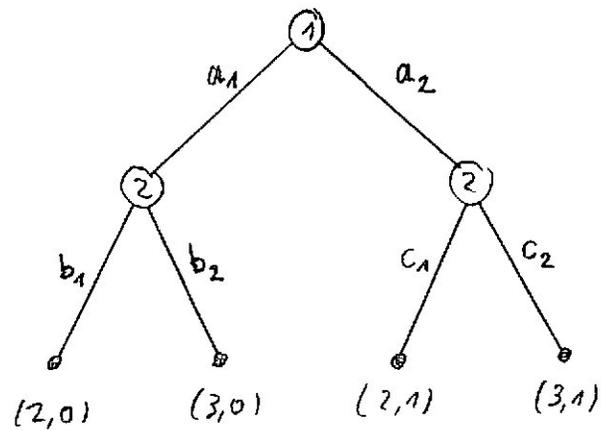
Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

(Fortsetzung Aufgabe 4)

- (b) (3P) Das folgende Bild zeigt den Spielbaum eines extensiven 2-Personenspiels ohne Zufall und mit perfekter Information.



Listen Sie alle Teilspiel-perfekten Gleichgewichte und ihre Auszahlungswerte auf, in der Form  $(a_i, b_j, c_k) : (\dots)$  für geeignete  $i, j, k \in \{1, 2\}$ .

Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

**Aufgabe 5** (insgesamt 8 Punkte)

erreicht:

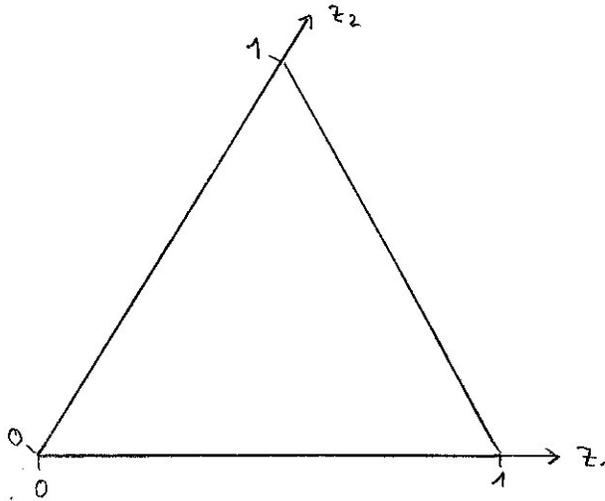
- (a) (4P) Die folgende Tabelle zeigt die Koalitionsbewertung eines kooperativen 3-Personenspiels  $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$  in 0-1-reduzierter Form,

	$\emptyset$	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$\mathcal{V}(\cdot)$	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

Ist das Spiel superadditiv? Ist es konvex? Begründen Sie Ihre Antworten. Die Menge der Zuteilungen ist hier

$$\mathcal{Z} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_i \in [0, 1], z_1 + z_2 + z_3 = 1\}.$$

Sie ist bijektiv zum Simplex  $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1, z_2, z_1 + z_2 \in [0, 1]\}$ , den das folgende Bild zeigt. Tragen Sie den Kern  $\mathcal{K}$  des Spiels (genauer: sein Bild unter der Bijektion von  $\mathcal{Z}$  auf den Simplex) in das Bild ein.



- (b) (4P) Die folgende Tabelle zeigt die Koalitionsbewertung eines allgemeinen kooperativen 3-Personenspiels  $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$  in 0-1-reduzierter Form,

	$\emptyset$	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$\mathcal{V}(\cdot)$	0	0	0	0	$\alpha_3$	$\alpha_2$	$\alpha_1$	1

hier sind  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ .

Zeigen Sie: Das Spiel ist genau dann superadditiv, wenn  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 1$  gilt.

Name:

Matrikelnummer:

Sitzplatz:

---

**Aufgabe 6** (insgesamt 8 Punkte)

erreicht:

Sei  $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$  ein kooperatives Spiel. Erinnerung: Die Menge der Zuteilungen ist  $\mathcal{Z}$ , der Kern ist  $\mathcal{K}$ ,

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}), \quad \forall i \in \mathcal{A} \quad z_i \geq \mathcal{V}(\{i\}),\}$$

$$\mathcal{K} = \{z \in \mathcal{Z} \mid \forall B \subset \mathcal{A} \quad \sum_{i \in B} z_i \geq \mathcal{V}(B)\}.$$

Für jedes  $\pi \in S_m$  wird der Vektor  $x^\pi \in \mathbb{R}^m$  so definiert:

$$x_{\pi(j)}^\pi := \mathcal{V}(\{\pi(1), \dots, \pi(j)\}) - \mathcal{V}(\{\pi(1), \dots, \pi(j-1)\}).$$

Sei nun  $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$  ein konvexes Spiel.

(a) (2P) Zeigen Sie:  $\forall \pi \in S_m \quad x^\pi \in \mathcal{Z}$ .

(b) (2P) Zeigen Sie:  $\forall \pi \in S_m, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \forall C \subset \{\pi(1), \dots, \pi(j-1)\}$   
 $x_{\pi(j)}^\pi \geq \mathcal{V}(C \cup \{\pi(j)\}) - \mathcal{V}(C)$ .

(c) (4P) Zeigen Sie:  $\forall \pi \in S_m \quad x^\pi \in \mathcal{K}$ .