Aufgaben und Lösungen der
Klausur zur Spieltheorie im HWS 2011, 09.12.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(i) (1P) Geben Sie die Definition für eine *maximin-Strategie* bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform an.
(ii) (1P) Geben Sie die Definition für ein *Nash-Gleichgewicht* bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform an.
(iii) (1P) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{R}^a$, $B \subset \mathbb{R}^b$, $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Eine Korrespondenz f von A nach B ist eine Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(B)$. Geben Sie die Definition an, wann eine Korrespondenz f von A nach B *halbstetig von oben* ist.
(iv) (1P) Formulieren Sie den Fixpunktsatz von Brouwer.
(v) (1P) Gegeben ist ein extensives Spiel $(\mathcal{A}, Z, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ ohne Zufall und mit perfekter Information. Definieren Sie für dieses Spiel, was eine *Strategie* des Spielers $i \in \mathcal{A}$ ist.
(vi) (1P) Gegeben ist ein endliches extensives Spiel $(\mathcal{A}, Z, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ ohne Zufall und mit perfekter Information. Definieren Sie für dieses Spiel, was eine *Verhaltensstrategie* des Spielers $i \in \mathcal{A}$ ist. (Vorsicht: Weil hier perfekte Information vorausgesetzt ist, fällt eine der zwei Bedingungen in der Definition der Vorlesung weg.)
(vii) (1P) Geben Sie die Definitionen eines *kooperativen Spiels* und der Menge seiner *Zuteilungen* an.
(viii) (1P) Geben Sie die Definition des *Kerns* eines kooperativen Spiels an.

Lösung:

(i) Bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform ist eine maximin-Strategie des Spielers $i \in \mathcal{A}$ eine Strategie $s_0^i \in S^i$ mit:

$$\inf_{s^{-i} \in S^{-i}} U^i(\sigma_i(s_0^i, s^{-i})) = \max_{s^i \in S^i} \inf_{s^{-i} \in S^{-i}} U^i(\sigma_i(s^i, s^{-i})).$$

(ii) Bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform ist ein Nash-Gleichgewicht eine Strategienkombination $s_0 \in S$ mit:

$$\forall\ i \in \mathcal{A} \quad \forall\ s^i \in S^i \quad U^i(s_0) \geq U^i(\sigma_i(s^i, s_0^{-i})).$$

(iii) Eine Korrespondenz f von A nach B ist halbstetig von oben, falls gilt:

$$C \subset B \text{ offen } \Rightarrow \{x \in \mathcal{A} \,|\, f(x) \subset C\} \text{ offen in } A.$$

(iv) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ kompakt und konvex, und sei $f : K \to K$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x \in K$ mit $x = f(x)$.

(v) Bei einem extensiven Spiel $(\mathcal{A}, Z, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ ohne Zufall und mit perfekter Information ist eine Strategie s^i des Spielers $i \in \mathcal{A}$ eine Abbildung $s^i : \mathcal{B}^i \to Z$ mit $s^i(\alpha) \in Z(\alpha)\ \forall\ \alpha \in \mathcal{B}^i$. Hier ist $\mathcal{B}^i = \mathcal{P}^{-1}(i) \subset \mathcal{B}$.

(vi) Bei einem endlichen extensiven Spiel $(\mathcal{A}, Z, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ ohne Zufall und mit perfekter Information ist eine Verhaltensstrategie φ^i des Spielers $i \in \mathcal{A}$ eine Abbildung

$$\varphi^i : \bigcup_{\alpha \in \mathcal{B}^i} \{\alpha\} \times Z(\alpha) \to [0, 1]$$

mit

$$\forall\ \alpha \in \mathcal{B}^i \qquad \sum_{z \in Z(\alpha)} \varphi^i(\alpha, z) = 1.$$

(vii) Ein kooperatives Spiel ist ein Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ mit folgenden Eigenschaften: $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{1, ..., m\}$ ist die Menge der Spieler; $\mathcal{V}$ ist eine Abbildung $\mathcal{V} : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, die Koalitionsbewertung.
Die Menge der Zuteilungen des Spiels $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ ist die Menge

$$\mathcal{Z} = \{(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{R}^m \,|\, \sum_{i=1}^{m} z_i = \mathcal{V}(\mathcal{A}), \quad \forall\ i \in \mathcal{A}\ z_i \geq \mathcal{V}(\{i\})\}.$$

(viii) Der Kern eines kooperativen Spiels $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ ist die Menge

$$\mathcal{K} = \{z \in \mathcal{Z} \,|\, \forall\ B \subset \mathcal{A} \quad \sum_{i \in B} z_i \geq \mathcal{V}(B)\}.$$

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (4P) Hier ist die Auszahlungsmatrix zu einem 2-Personenspiel in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 3$,

	s_1^2	s_2^2	s_3^2
s_1^1	(4,4)	(5,5)	(6,5)
s_2^1	(4,4)	(4,6)	(4,2)
s_3^1	(3,4)	(5,4)	(2,4)

Geben Sie für jeden Spieler alle maximin-Strategien und alle dominanten Strategien an, und geben Sie alle Gleichgewichte in dominanten Strategien und alle Nash-Gleichgewichte an. Begründungen sind nicht nötig.

(b) (4P) Hier ist die Auszahlungsmatrix zu einem 2-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 4$,

	s_1^2	s_2^2	s_3^2	s_4^2
s_1^1	(1,2)	(2,1)	(5,1)	(1,1)
s_2^1	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(1,2)
s_3^1	(1,1)	(2,2)	(3,2)	(1,1)
s_4^1	(2,3)	(3,1)	(2,2)	(1,2)

Die Nash-Gleichgewichte seiner gemischten Erweiterung lassen sich durch Reduktion der Mengen der reinen Strategien bestimmen. Es gibt Strategien $s_{j_1}^{i_1}, g_1^{i_1}, ..., s_{j_6}^{i_6}, g_6^{i_6}$ mit $i_1, ..., i_6 \in \{1, 2\}$, $j_1, ..., j_6 \in \{1, 2, 3, 4\}$ und mit folgenden Eigenschaften:
Für $k = 1, ..., 6$ gilt: $s_{j_k}^{i_k} \in S^{i_k}$, $g_k^{i_k} \in G^{i_k}$, und in der gemischten Erweiterung des Spiels, das man durch Streichen von $s_{j_1}^{i_1}, ..., s_{j_{k-1}}^{i_{k-1}}$ aus $(\mathcal{A}, S, U)$ erhält, wird $s_{j_k}^{i_k}$ stark durch $g_k^{i_k}$ dominiert.
Geben Sie $s_{j_1}^{i_1}, g_1^{i_1}, ..., s_{j_6}^{i_6}, g_6^{i_6}$ (in dieser Reihenfolge) und alle Nash-Gleichgewichte von $(\mathcal{A}, G, V)$ an. Begründungen sind nicht nötig.

Lösung:

(a) maximin-Strategien des 1. Spielers: s_1^1, s_2^1.
maximin-Strategien des 2. Spielers: s_1^2, s_2^2.
dominante Strategie(n) des 1. Spielers: s_1^1.
dominante Strategie(n) des 1. Spielers: s_2^2.
Gleichgewicht(e) in dominanten Strategien: (s_1^1, s_2^2).
Nash-Gleichgewichte: (s_1^1, s_2^2), (s_1^1, s_3^2), (s_3^1, s_2^2).

(b) Es gibt viele Lösungen. Bei allen Lösungen ist $\{s^{i_1}_{j_1}, ..., s^{i_6}_{j_6}\} = (S^1 - \{s^1_4\}) \cup (S^2 - \{s^2_1\})$. Daher ist das einzige Nash-Gleichgewicht von $(\mathcal{A}, G, V)$ die Strategienkombination (s^1_4, s^2_1).
Es gibt mindestens 7 Möglichkeiten, die $s^{i_1}_{j_1}, ..., s^{i_6}_{j_6}$ zu sortieren. In der folgenden Tabelle wird in den ersten beiden und in den letzten beiden Spalten je eine Lösung präsentiert. Bei der Lösung in den ersten beiden Spalten kann man die Zeilen 2 und 3 vertauschen, und man kann die Zeilen 4 und 5 vertauschen; das gibt weitere 3 Lösungen. Oder man kann die Zeilen 2 und 3 vertauschen, und man kann die Zeilen 5 und 6 vertauschen; das gibt weitere 2 Lösungen. Bei den Koeffizienten der $g^{i_k}_k$ hat man oft kontinuierliche Wahlmöglichkeiten; es ist jeweils nur eine angegeben.

$s^{i_k}_{j_k}$	$g^{i_k}_k$	$s^{i_k}_{j_k}$ | $g^{i_k}_k$	$s^{i_k}_{j_k}$ | $g^{i_k}_k$	$s^{i_k}_{j_k}$	$g^{i_k}_k$
s^2_4	$\frac{1}{2}s^2_1 + \frac{1}{2}s^2_3$			s^2_4	$\frac{1}{2}s^2_1 + \frac{1}{2}s^2_3$
s^1_2	$\frac{1}{2}s^1_1 + \frac{1}{2}s^1_4$	Zeilen 2 und 3	Zeilen 2 und 3	s^1_3	$\frac{1}{2}s^1_1 + \frac{1}{2}s^1_4$
s^1_3	$\frac{1}{2}s^1_1 + \frac{1}{2}s^1_4$	vertauschbar	vertauschbar	s^2_2	$\frac{1}{3}s^2_1 + \frac{2}{3}s^2_3$
s^2_3	s^2_1	Zeilen 4 und 5		s^1_2	$\frac{1}{2}s^1_1 + \frac{1}{2}s^1_4$
s^2_2	s^2_1	vertauschbar	Zeilen 5 und 6	s^2_3	s^2_1
s^1_1	s^1_4		vertauschbar	s^1_1	s^1_4

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (4P) Erinnerung: Bei einem endlichen 2-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 2$ und mit Auszahlungsmatrix

$$\begin{pmatrix} (U^1_{11}, U^2_{11}) & (U^1_{12}, U^2_{12}) \\ (U^1_{21}, U^2_{21}) & (U^1_{22}, U^2_{22}) \end{pmatrix}$$

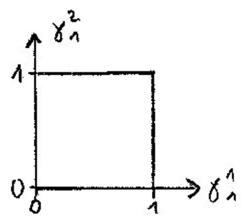
sind die Auszahlungsfunktionen V^1 und V^2 seiner gemischten Erweiterung

$$\begin{aligned} V^1 &= \kappa^1(g^2) + \lambda^1_1(g^2) \cdot \gamma^1_1 \quad \text{mit} \quad \lambda^1_1(g^2) = (U^1_{12} - U^1_{22}) + (U^1_{11} - U^1_{12} - U^1_{21} + U^1_{22}) \cdot \gamma^2_1, \\ V^2 &= \kappa^2(g^1) + \lambda^2_1(g^1) \cdot \gamma^2_1 \quad \text{mit} \quad \lambda^2_1(g^1) = (U^2_{21} - U^2_{22}) + (U^2_{11} - U^2_{21} - U^2_{12} + U^2_{22}) \cdot \gamma^1_1. \end{aligned}$$

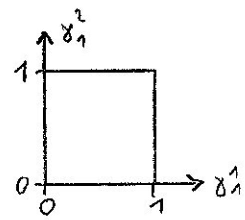
Berechnen Sie beim 2-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit der Auszahlungsmatrix

	s^2_1	s^2_2
s^1_1	(0,0)	(1,2)
s^1_2	(1,1)	(0,0)

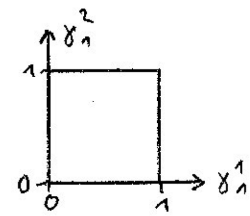
die (affin linearen) Funktionen $\lambda^1_1(g^2)$ und $\lambda^2_1(g^1)$, geben Sie die beste-Antwort-Abbildungen $r^1 : G^2 \to \mathcal{P}(G^1)$ und $r^2 : G^1 \to \mathcal{P}(G^2)$ der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$ und die Menge der Nash-Gleichgewichte der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$ an, und tragen Sie (zusätzlich) die Graphen der Nash-Gleichgewichte (der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$) hier ein:
(Hinweis: $|\{\text{Nash-Gleichgewichte}\}| = 3$ hier)



Gr(r¹)



Gr(r²)



{Nash-Gleichgewichte}

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

(Fortsetzung Aufgabe 3)

(b) (4P) Hier ist ein endliches m-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit $|S^j| = 3$ für alle $j \in \mathcal{A}$: $S^j = \{-1, 0, 1\}$,

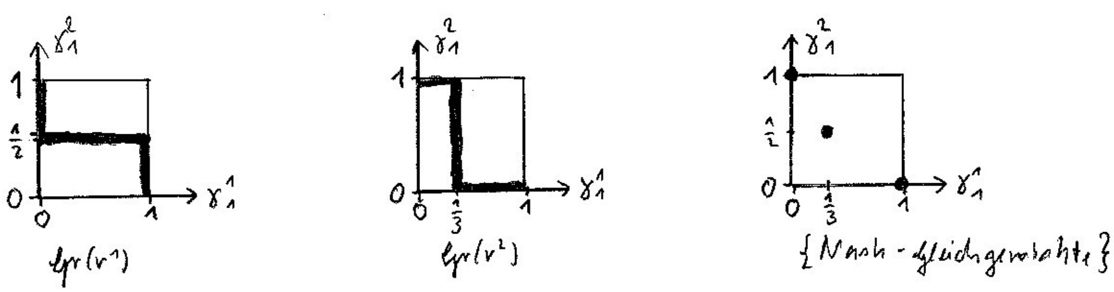
$$U^j(s) = \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i \geq 0 \quad \text{und} \quad s^j = -1, \\ 1 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i \geq 0 \quad \text{und} \quad s^j = 0, \\ 0 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i \geq 0 \quad \text{und} \quad s^j = 1, \\ 0 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i < 0 \quad \text{und} \quad s^j = -1, \\ -1 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i < 0 \quad \text{und} \quad s^j = 0, \\ -2 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i < 0 \quad \text{und} \quad s^j = 1. \end{cases}$$

Geben Sie alle Nash-Gleichgewichte dieses Spiels an, und begründen Sie, warum alle anderen Strategienkombinationen keine Nash-Gleichgewichte sind. (Daß die Nash-Gleichgewichte Nash-Gleichgewichte sind, müssen Sie nicht begründen.)

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} \lambda_1^1(g^2) &= 1 - 2\gamma_1^2, \\ r^1(g^2) &= \begin{cases} \{s_1^1\} & \text{falls} \quad \gamma_1^2 < \frac{1}{2}, \\ G^1 & \text{falls} \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{2}, \\ \{s_2^1\} & \text{falls} \quad \gamma_1^2 > \frac{1}{2}, \end{cases}, \\ \lambda_1^2(g^1) &= 1 - 3\gamma_1^1, \\ r^2(g^1) &= \begin{cases} \{s_1^2\} & \text{falls} \quad \gamma_1^1 < \frac{1}{3}, \\ G^2 & \text{falls} \quad \gamma_1^1 = \frac{1}{3}, \\ \{s_2^2\} & \text{falls} \quad \gamma_1^1 > \frac{1}{3}, \end{cases}, \\ \{\text{Nash-Gl.}\} &= \{(s_1^1, s_2^2), (s_2^1, s_1^2), (\frac{1}{3}s_1^1 + \frac{2}{3}s_2^1, \frac{1}{2}s_1^2 + \frac{1}{2}s_2^2)\}. \end{aligned}$$



(b)

$$\{\text{Nash-Gleichgewichte}\} = \{(-1, ..., -1)\} \cup \{s \in S \mid \sum_{i=1}^m s^i = 0\}.$$

Eine Strategienkombination $s = (s^1, ..., s^m)$ mit $\sum_{i=1}^m s^i > 0$ ist kein Nash-Gleichgewicht, denn dann gibt es mindestens einen Spieler j mit $s^j \geq 0$. Für einen solchen Spieler ist die Strategie $\widetilde{s}^j := s^j - 1$ besser als s^j (bei fester

Strategienkombination s^{-j} der anderen Spieler), denn wegen $\widetilde{s}^j + \sum_{i \neq j} s^i \geq 0$ ist

$$U^j(\sigma_j(\widetilde{s}^j, s^{-j})) = U^j(s) + 1.$$

Eine Strategienkombination $s = (s^1, ..., s^m)$ mit $\sum_{i=1}^m s^i < 0$ und $s \neq (-1, ..., -1)$ ist kein Nash-Gleichgewicht, denn dann gibt es mindestens einen Spieler j mit $s^j \geq 0$. Für einen solchen Spieler ist die Strategie $\widetilde{s}^j := s^j - 1$ besser als s^j (bei fester Strategienkombination s^{-j} der anderen Spieler), denn es ist

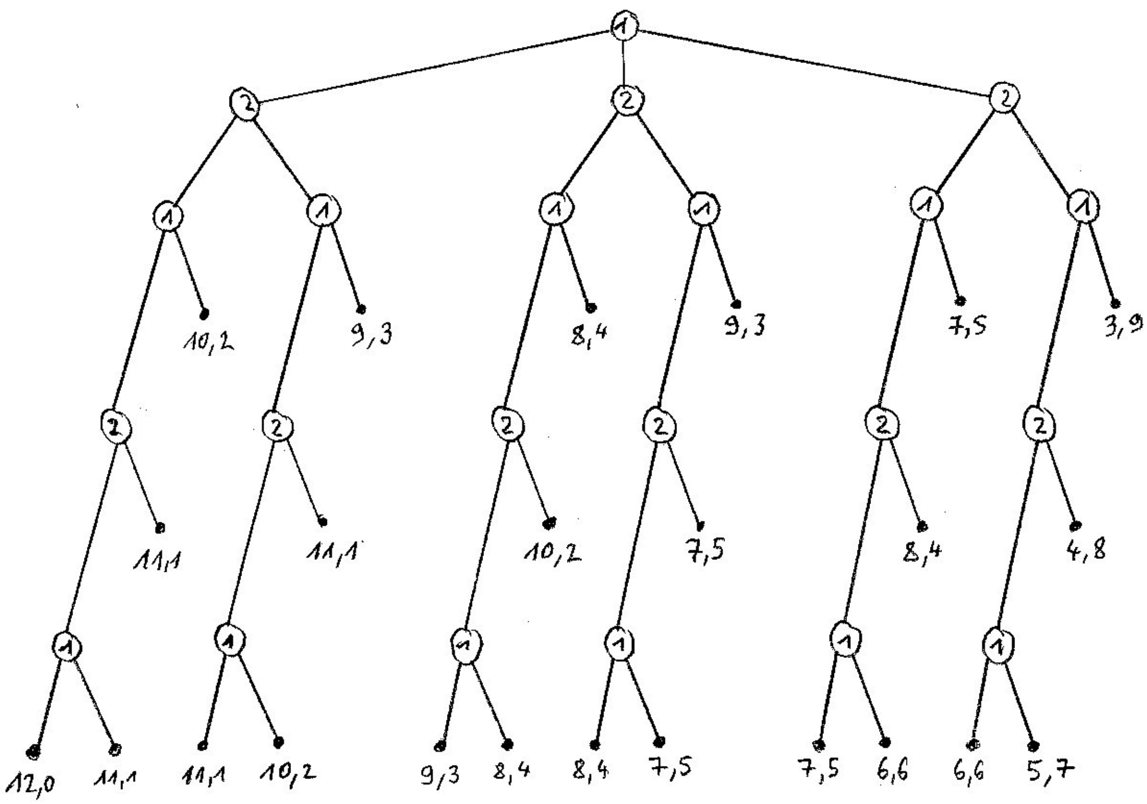
$$U^j(\sigma_j(\widetilde{s}^j, s^{-j})) = U^j(s) + 1.$$

Name:

Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (5P) Das folgende Bild zeigt den Spielbaum eines extensiven 2-Personenspiels ohne Zufall und mit perfekter Information. Zeichnen Sie alle Spielzüge dick, die mit Algorithmus 4.2.3 eindeutig gewählt werden, und zeichnen Sie alle Spielzüge gestrichelt dick, bei denen der jeweilige Spieler eine Wahl zwischen mehreren gleich guten Möglichkeiten hat. Wieviele Teilspiel-perfekte Gleichgewichte gibt es? (Eine Begründung der Antwort ist nicht nötig.)



Das zugehörige Spiel in Normalform ist ein Konstantsummenspiel, daher haben alle seine Nash-Gleichgewichte den gleichen Auszahlungswert für Spieler 1. Was ist dieser Wert? (Eine Begründung der Antwort ist nicht nötig.)

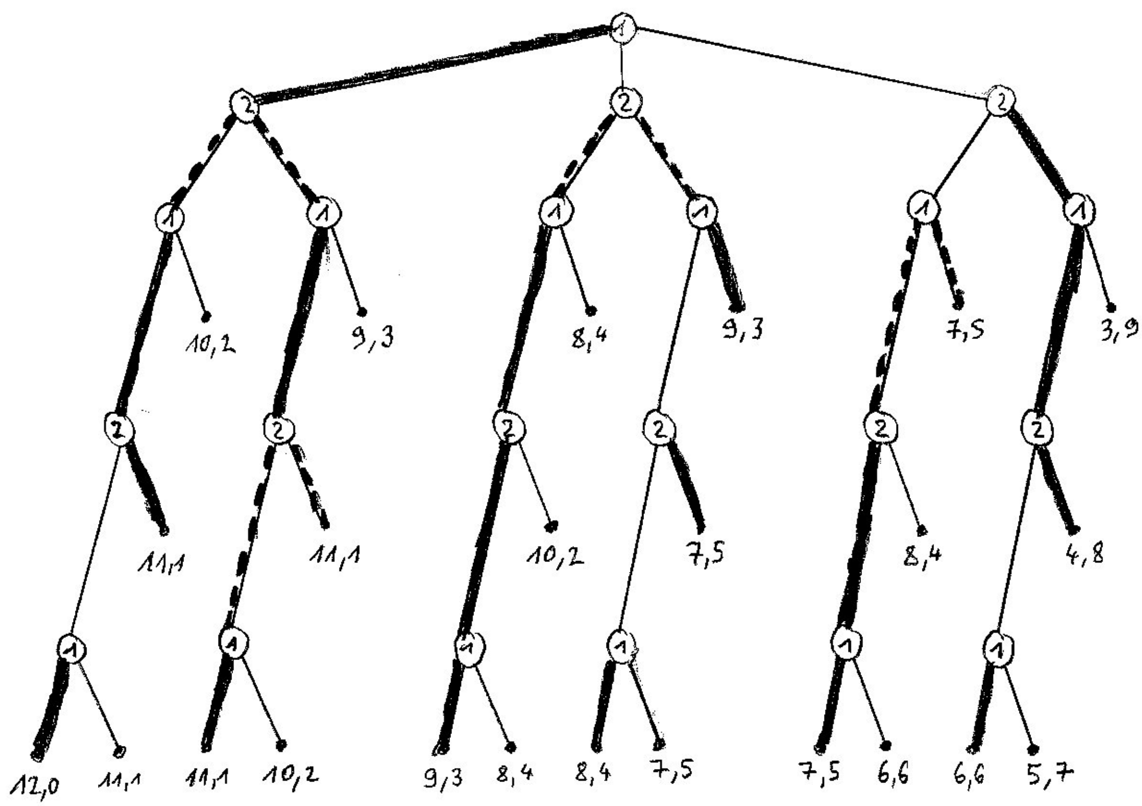
Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

(Fortsetzung Aufgabe 4)

(b) (3P) Geben Sie den Spielbaum (mit Angabe des Spielers, der nach einem nicht terminalen Spielablauf am Zug ist, und mit Angabe der Auszahlungswerte bei den terminalen Spielabläufen) eines extensiven 2-Personenspiels $(\mathcal{A}, Z, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ ohne Zufall und mit perfekter Information und mit folgenden Eigenschaften an: Es hat 4 terminale Spielabläufe, mit Auszahlungswerten $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$ und $(3,1)$. Es hat 4 Teilspiel-perfekte Gleichgewichte $\{s^1, s^2, s^3, s^4\}$. Die Abbildung $\beta : \{s^1, s^2, s^3, s^4\} \to \mathcal{F}$, die jeder dieser Strategienkombinationen den terminalen Spielablauf zuordnet, der bei ihrer Ausführung erreicht wird, ist bijektiv. (Eine Begründung, daß der angegebene Spielbaum diese Eigenschaften erfüllt, ist nicht nötig.)

Lösung:

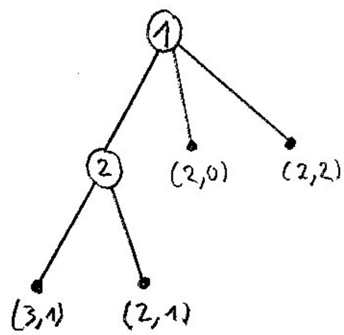
(a) Anzahl der Teilspiel-perfekten Gleichgewichte: 16.
Auszahlungswert von Nash-Gleichgewichten für Spieler 1: 11.



Name:

Matrikelnummer: Sitzplatz:

(b) .



Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

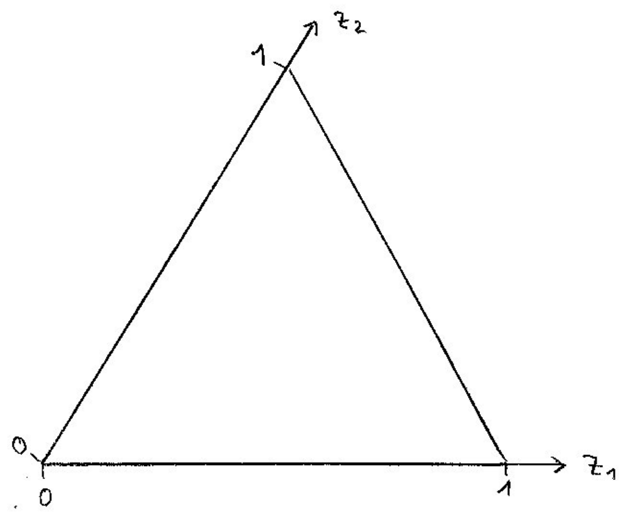
(a) (4P) Die folgende Tabelle zeigt die Koalitionsbewertung eines kooperativen 3-Personenspiels $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ in 0-1-reduzierter Form,

	$\emptyset$	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$\mathcal{V}(.)$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Ist das Spiel superadditiv? Ist es konvex? Begründen Sie Ihre Antworten. Die Menge der Zuteilungen ist hier

$$\mathcal{Z} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z_i \in [0, 1], z_1 + z_2 + z_3 = 1\}.$$

Sie ist bijektiv zum Simplex $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, z_1, z_2, z_1 + z_2 \in [0, 1]\}$, den das folgende Bild zeigt. Tragen Sie den Kern $\mathcal{K}$ des Spiels (genauer: sein Bild unter der Bijektion von $\mathcal{Z}$ auf den Simplex) in das Bild ein.



(b) (4P) Das Spiel "Rousseaus Hirschjagdparabel" ist das endliche 2-Personenspiel in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 2$ und mit der Auszahlungsmatrix

	s_1^2	s_2^2
s_1^1	(2,2)	(4,0)
s_2^1	(0,4)	(5,5)

Daraus wird folgendermaßen ein extensives Spiel mit $|\mathcal{B} - \mathcal{F}| = 3$ und $|\mathcal{F}| = 4$ gemacht: Erst wählt Spieler 1 s_1^1 oder s_2^1, danach wählt Spieler 2 s_1^2 oder s_2^2.

Geben Sie den Spielbaum an, mit Angabe des Spielers, der nach einem nicht terminalen Spielablauf am Zug ist, mit Angabe vom richtigen s_j^i an der Kante eines Spielzugs, und mit Angabe der Auszahlungswerte bei terminalen Spielabläufen. Geben Sie auch das zugehörige Spiel in Normalform an (Vorsicht, es ist nicht das Ausgangsspiel, sondern Spieler 2 hat nun 4 Strategien). Geben Sie für dieses Spiel alle Nash-Gleichgewichte und alle Teilspiel-perfekten Gleichgewichte an. (Begründungen sind nicht nötig.)

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Lösung:

(a) Das Spiel ist superadditiv, denn für $B, C \subset \mathcal{A}$ mit $B \cap C = \emptyset$ und $|B| = |C| = 1$ ist

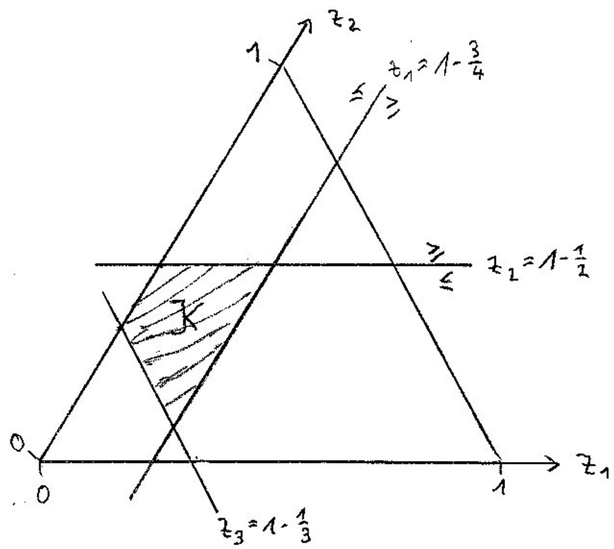
$$\mathcal{V}(B) + \mathcal{V}(C) = 0 + 0 \leq \mathcal{V}(B \cup C) = (\frac{1}{3} \text{ oder } \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{3}{4}),$$

und für $B, C \subset \mathcal{A}$ mit $B \cap C = \emptyset$ und $|B| = 1, |C| = 2$ ist

$$\mathcal{V}(B) + \mathcal{V}(C) = 0 + (\frac{1}{3} \text{ oder } \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{3}{4}) \leq \mathcal{V}(B \cup C) = \mathcal{V}(\mathcal{A}) = 1$$

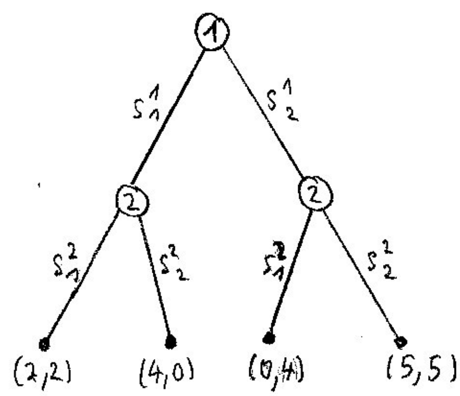
Das Spiel ist nicht konvex, denn zum Beispiel für $B = \{1, 2\}$ und $C = \{2, 3\}$ ist

$$\mathcal{V}(B) + \mathcal{V}(C) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} > 1 = \mathcal{V}(B \cup C) + \mathcal{V}(B \cap C) = \mathcal{V}(\mathcal{A}) + 0 = 1 + 0.$$



Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

(b)



Alle Strategienkombinationen des extensives Spiels bzw. des zugehörigen Spiels in Normalform werden als Tripel $(s^1_{j_1}, s^2_{j_2}, s^2_{j_3})$ angegeben, $s^2_{j_2}$ ist hier die Wahl des Spielers 2 beim linken Spielstand, $s^2_{j_3}$ ist seine Wahl beim rechten Spielstand.

Das extensive Spiel hat genau ein Teilspiel-perfektes Gleichgewicht, (s^1_2, s^2_1, s^2_2). Das sieht man am Spielbaum.
Das zugehörige Spiel in Normalform hat 3 Nash-Gleichgewichte, (s^1_2, s^2_1, s^2_2), (s^1_2, s^2_2, s^2_2), (s^1_1, s^2_1, s^2_1). Die sieht man an der Auszahlungsmatrix des zugehörigen Spiels in Normalform:

	(s^2_1, s^2_1)	(s^2_1, s^2_2)	(s^2_2, s^2_1)	(s^2_2, s^2_2)
s^1_1	(2,2)	(2,2)	(4,0)	(4,0)
s^1_2	(0,4)	(5,5)	(0,4)	(5,5)

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (4P) Sei $\mathcal{A} = \{1, 2, ..., m\}$. Für $B \subset \mathcal{A}$ wird ein Differenzenoperator

$$\delta_B : \mathrm{Abb}(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathbb{R})$$

definiert durch

$$(\delta_B(\mathcal{V}))(C) := \mathcal{V}(C \cup B) - \mathcal{V}(C - B) \quad \text{für } B, C \subset \mathcal{A},\ \mathcal{V} \in \mathrm{Abb}(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathbb{R}).$$

(Es ist $C - B = \{i \in \mathcal{A} \,|\, i \in C, i \notin B\}$.)

Zeigen Sie: Ein kooperatives Spiel $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ ist genau dann konvex , wenn gilt:

$$(\delta_B(\delta_C(\mathcal{V})))(D) \geq 0 \qquad \text{für alle } B, C, D \subset \mathcal{A}.$$

(b) (4P) Sei $(\mathcal{A}, S, U)$ ein 2-Personenspiel und ein Nullsummenspiel in Normalform mit $S^1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ kompakt und $S^2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ kompakt (für gewisse $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$), mit $U^1 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und mit $\{\text{Nash-Gleichgewichte}\} \neq \emptyset$. Sei

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{\text{Nash-Gleichgewichte}\}, \\ B_2 &:= \{(s^1, s^2) \,|\, s^i \text{ ist maximin-Strategie des Spielers } i \text{ für } i = 1, 2\}. \end{aligned}$$

Gilt $B_1 \subset B_2$? $B_1 = B_2$? $B_1 \supset B_2$? $B_1 \not\subseteq B_2$ und $B_1 \not\supseteq B_2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} & (\delta_B(\delta_C(\mathcal{V})))(D) \\ = \ & (\delta_C(\mathcal{V}))(D \cup B) - (\delta_C(\mathcal{V}))(D - B) \\ = \ & \mathcal{V}((D \cup B) \cup C) - \mathcal{V}((D \cup B) - C) - \mathcal{V}((D - B) \cup C) + \mathcal{V}((D - B) - C) \\ = \ & \mathcal{V}(D \cup B \cup C) - \mathcal{V}((D \cup B) - C) - \mathcal{V}((D - B) \cup C) + \mathcal{V}(D - (B \cup C)). \end{aligned}$$

Mit $E := (D \cup B) - C$ und $F := (D - B) \cup C$ ist

$$E \cup F = D \cup B \cup C \quad \text{und} \quad \mathrm{E} \cap F = D - (B \cup C),$$

also

$$(\delta_B(\delta_C(\mathcal{V})))(D) = \mathcal{V}(E \cup F) + \mathcal{V}(E \cap F) - \mathcal{V}(E) - \mathcal{V}(F). \qquad (*)$$

Aus $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ konvex folgt daher $(\delta_B(\delta_C(\mathcal{V})))(D) \geq 0$. Das zeigt $\Rightarrow$.

Zu $\Leftarrow$:
Behauptung: Für beliebige Teilmengen $E, F \subset \mathcal{A}$ gibt es $B, C, D \subset \mathcal{A}$ mit

$$E = (D \cup B) - C \quad \text{und} \quad F = (D - B) \cup C.$$

Beweis: $B := E - F$, $C := F - E$, $D := E \cap F$. $(\square)$

Aus der Behauptung und aus $(*)$ folgt $\Leftarrow$. $\square$

(b) Satz 3.2.1.3 der Vorlesung sagt:

(α) Bei einem 2-Personen-Nullsummenspiel sind folgende Bedingungen für eine Strategienkombination $s_0 \in S$ äquivalent:

(i) s_0 ist ein Nash-Gleichgewicht.

(ii) s_0 ist ein Sattelpunkt.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

(iii) s_0 ist eine Realisierung einer maximin-Strategie für Spieler 1 und eine Realisierung einer maximin-Strategie für Spieler 2.

(β) Bei einem 2-Personen-Nullsummenspiel mit {Nash-Gleichgewichte} $\neq \emptyset$ gilt

$$\max_{s^1\in S^1} \inf_{s^2\in S^2} U^1(s^1,s^2) = \min_{s^2\in S^2} \sup_{s^1\in S^1} U^1(s^1,s^2),$$

und das ist der Wert $U^1(s_0)$ für jedes Nash-Gleichgewicht s_0.

Aus (α) $(i) \Rightarrow (iii)$ folgt $B_1 \subset B_2$.

Es gilt sogar $B_1 = B_2$. Dafür muß man noch $B_1 \supset B_2$ zeigen. Seien s_0^1 und s_0^2 maximin-Strategien von Spieler 1 bzw. Spieler 2. Zu zeigen ist, daß (s_0^1, s_0^2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Weil $S^1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $S^2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ kompakt sind und U^1 stetig ist, kann im folgenden immer min statt inf und max statt sup geschrieben werden. Das erste bzw. das letzte Gleichheitszeichen in der folgenden (Un)Gleichungskette gilt, weil s_0^1 bzw. s_0^2 eine maximin-Strategie für Spieler 1 bzw. Spieler 2 ist.

$$\begin{aligned}\max_{s^1\in S^1} \min_{s^2\in S^2} U^1(s^1,s^2) &= \min_{s^2\in S^2} U^1(s_0^1,s^2) \leq U^1(s_0^1,s_0^2) \\ &\leq \max_{s^1\in S^1} U^1(s^1,s_0^2) = \min_{s^2\in S^2} \max_{s^1\in S^1} U^1(s^1,s^2).\end{aligned}$$

Wegen {Nash-Gleichgewichte} $\neq \emptyset$ und wegen (β) sind die linke und rechte Seite dieser (Un)Gleichungskette gleich. Daher gilt überall Gleichheit. Daher ist (s_0^1, s_0^2) ein Sattelpunkt von U^1. Wegen (α) $(ii) \Rightarrow (i)$ ist (s_0^1, s_0^2) ein Nash-Gleichgewicht. $\square$

Bemerkung: Dieses Argument für den Beweis von $B_1 \supset B_2$ steht im Beweis von Satz 3.2.1.5 (b) $\Leftarrow$.