Klausur zur Spieltheorie im HWS 2011, 09.12.2011
Universität Mannheim, Prof. Dr. C. Hertling

Name:
Matrikelnummer:
Sitzplatznummer:

Die Bearbeitungszeit für diese Klausur beträgt 90 Minuten. Die Klausur umfaßt sechs Aufgaben, jede mit acht Punkten bewertet, obwohl der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nicht gleich ist.

Bitte schreiben Sie eine Lösung mit allen Zwischenrechnungen nur auf das jeweilige Aufgabenblatt (Vorder- und Rückseite). Sollte Ihnen bei einer Aufgabe ein Blatt nicht genügen, fragen Sie bitte nach einem neuen Blatt und schreiben später auf dieses Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer sowie die Aufgabennummer.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt. Bei einem Täuschungsversuch gilt die Klausur als nicht bestanden.

Viel Erfolg!

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Name:

Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 1 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(i) (1P) Geben Sie die Definition für eine *maximin-Strategie* bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform an.

(ii) (1P) Geben Sie die Definition für ein *Nash-Gleichgewicht* bei einem Spiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform an.

(iii) (1P) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $A \subset \mathbb{R}^a$, $B \subset \mathbb{R}^b$, $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Eine Korrespondenz f von A nach B ist eine Abbildung $f : A \to \mathcal{P}(B)$. Geben Sie die Definition an, wann eine Korrespondenz f von A nach B *halbstetig von oben* ist.

(iv) (1P) Formulieren Sie den Fixpunktsatz von Brouwer.

(v) (1P) Gegeben ist ein extensives Spiel $(\mathcal{A}, Z, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ ohne Zufall und mit perfekter Information. Definieren Sie für dieses Spiel, was eine *Strategie* des Spielers $i \in \mathcal{A}$ ist.

(vi) (1P) Gegeben ist ein endliches extensives Spiel $(\mathcal{A}, Z, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ ohne Zufall und mit perfekter Information. Definieren Sie für dieses Spiel, was eine *Verhaltensstrategie* des Spielers $i \in \mathcal{A}$ ist. (Vorsicht: Weil hier perfekte Information vorausgesetzt ist, fällt eine der zwei Bedingungen in der Definition der Vorlesung weg.)

(vii) (1P) Geben Sie die Definitionen eines *kooperativen Spiels* und der Menge seiner *Zuteilungen* an.

(viii) (1P) Geben Sie die Definition des *Kerns* eines kooperativen Spiels an.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 2 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (4P) Hier ist die Auszahlungsmatrix zu einem 2-Personenspiel in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 3$,

	s_1^2	s_2^2	s_3^2
s_1^1	(4,4)	(5,5)	(6,5)
s_2^1	(4,4)	(4,6)	(4,2)
s_3^1	(3,4)	(5,4)	(2,4)

Geben Sie für jeden Spieler alle maximin-Strategien und alle dominanten Strategien an, und geben Sie alle Gleichgewichte in dominanten Strategien und alle Nash-Gleichgewichte an. Begründungen sind nicht nötig.

(b) (4P) Hier ist die Auszahlungsmatrix zu einem 2-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 4$,

	s_1^2	s_2^2	s_3^2	s_4^2
s_1^1	(1,2)	(2,1)	(5,1)	(1,1)
s_2^1	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(1,2)
s_3^1	(1,1)	(2,2)	(3,2)	(1,1)
s_4^1	(2,3)	(3,1)	(2,2)	(1,2)

Die Nash-Gleichgewichte seiner gemischten Erweiterung lassen sich durch Reduktion der Mengen der reinen Strategien bestimmen. Es gibt Strategien $s_{j_1}^{i_1}, g_1^{i_1}, ..., s_{j_6}^{i_6}, g_6^{i_6}$ mit $i_1, ..., i_6 \in \{1, 2\}$, $j_1, ..., j_6 \in \{1, 2, 3, 4\}$ und mit folgenden Eigenschaften:
Für $k = 1, ..., 6$ gilt: $s_{j_k}^{i_k} \in S^{i_k}$, $g_k^{i_k} \in G^{i_k}$, und in der gemischten Erweiterung des Spiels, das man durch Streichen von $s_{j_1}^{i_1}, ..., s_{j_{k-1}}^{i_{k-1}}$ aus $(\mathcal{A}, S, U)$ erhält, wird $s_{j_k}^{i_k}$ stark durch $g_k^{i_k}$ dominiert.
Geben Sie $s_{j_1}^{i_1}, g_1^{i_1}, ..., s_{j_6}^{i_6}, g_6^{i_6}$ (in dieser Reihenfolge) und alle Nash-Gleichgewichte von $(\mathcal{A}, G, V)$ an. Begründungen sind nicht nötig.

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 3 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (4P) Erinnerung: Bei einem endlichen 2-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 2$ und mit Auszahlungsmatrix

$$\begin{pmatrix} (U^1_{11}, U^2_{11}) & (U^1_{12}, U^2_{12}) \\ (U^1_{21}, U^2_{21}) & (U^1_{22}, U^2_{22}) \end{pmatrix}$$

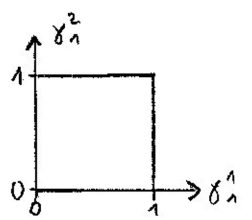
sind die Auszahlungsfunktionen V^1 und V^2 seiner gemischten Erweiterung

$$\begin{aligned} V^1 &= \kappa^1(g^2) + \lambda^1_1(g^2) \cdot \gamma^1_1 \quad \text{mit} \quad \lambda^1_1(g^2) = (U^1_{12} - U^1_{22}) + (U^1_{11} - U^1_{12} - U^1_{21} + U^1_{22}) \cdot \gamma^2_1, \\ V^2 &= \kappa^2(g^1) + \lambda^2_1(g^1) \cdot \gamma^2_1 \quad \text{mit} \quad \lambda^2_1(g^1) = (U^2_{21} - U^2_{22}) + (U^2_{11} - U^2_{21} - U^2_{12} + U^2_{22}) \cdot \gamma^1_1. \end{aligned}$$

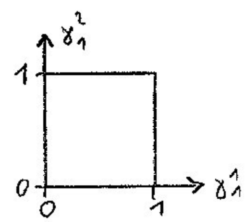
Berechnen Sie beim 2-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit der Auszahlungsmatrix

	s^2_1	s^2_2
s^1_1	(0,0)	(1,2)
s^1_2	(1,1)	(0,0)

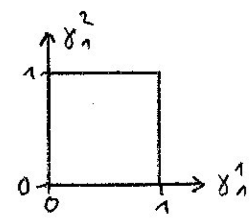
die (affin linearen) Funktionen $\lambda^1_1(g^2)$ und $\lambda^2_1(g^1)$, geben Sie die beste-Antwort-Abbildungen $r^1 : G^2 \to \mathcal{P}(G^1)$ und $r^2 : G^1 \to \mathcal{P}(G^2)$ der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$ und die Menge der Nash-Gleichgewichte der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$ an, und tragen Sie (zusätzlich) die Graphen der Nash-Gleichgewichte (der gemischten Erweiterung $(\mathcal{A}, G, V)$) hier ein:
(Hinweis: $|\{\text{Nash-Gleichgewichte}\}| = 3$ hier)



Gr(r^1)



Gr(r^2)



{Nash-Gleichgewichte}

(Fortsetzung Aufgabe 3)

(b) (4P) Hier ist ein endliches m-Personenspiel $(\mathcal{A}, S, U)$ in Normalform mit $|S^j| = 3$ für alle $j \in \mathcal{A}$: $S^j = \{-1, 0, 1\}$,

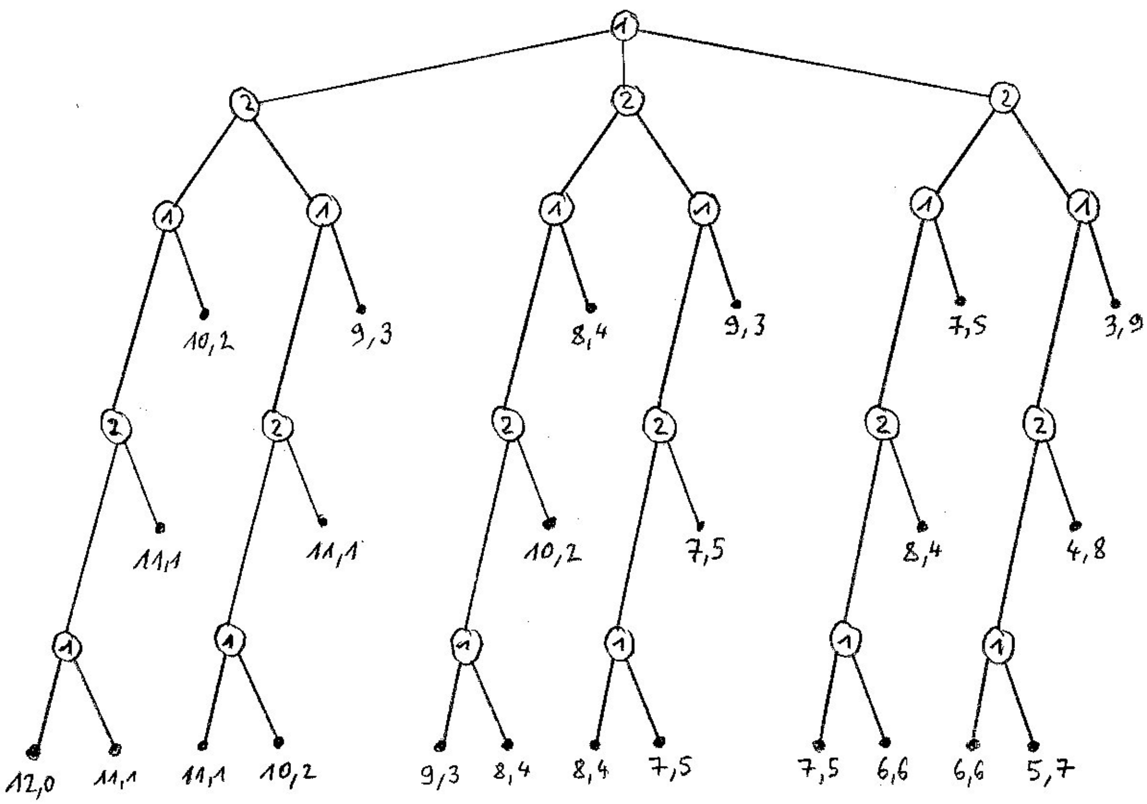
$$U^j(s) = \begin{cases} 2 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i \geq 0 \quad \text{und} \quad s^j = -1, \\ 1 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i \geq 0 \quad \text{und} \quad s^j = 0, \\ 0 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i \geq 0 \quad \text{und} \quad s^j = 1, \\ 0 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i < 0 \quad \text{und} \quad s^j = -1, \\ -1 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i < 0 \quad \text{und} \quad s^j = 0, \\ -2 & \text{falls} \quad \sum_{i=1}^m s^i < 0 \quad \text{und} \quad s^j = 1. \end{cases}$$

Geben Sie alle Nash-Gleichgewichte dieses Spiels an, und begründen Sie, warum alle anderen Strategienkombinationen keine Nash-Gleichgewichte sind. (Daß die Nash-Gleichgewichte Nash-Gleichgewichte sind, müssen Sie nicht begründen.)

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 4 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (5P) Das folgende Bild zeigt den Spielbaum eines extensiven 2-Personenspiels ohne Zufall und mit perfekter Information. Zeichnen Sie alle Spielzüge dick, die mit Algorithmus 4.2.3 eindeutig gewählt werden, und zeichnen Sie alle Spielzüge gestrichelt dick, bei denen der jeweilige Spieler eine Wahl zwischen mehreren gleich guten Möglichkeiten hat. Wieviele Teilspiel-perfekte Gleichgewichte gibt es? (Eine Begründung der Antwort ist nicht nötig.)



Das zugehörige Spiel in Normalform ist ein Konstantsummenspiel, daher haben alle seine Nash-Gleichgewichte den gleichen Auszahlungswert für Spieler 1. Was ist dieser Wert? (Eine Begründung der Antwort ist nicht nötig.)

(Fortsetzung Aufgabe 4)

(b) (3P) Geben Sie den Spielbaum (mit Angabe des Spielers, der nach einem nicht terminalen Spielablauf am Zug ist, und mit Angabe der Auszahlungswerte bei den terminalen Spielabläufen) eines extensiven 2-Personenspiels $(\mathcal{A}, Z, \mathcal{B}, \mathcal{P}, {}_eU)$ ohne Zufall und mit perfekter Information und mit folgenden Eigenschaften an: Es hat 4 terminale Spielabläufe, mit Auszahlungswerten $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$ und $(3,1)$. Es hat 4 Teilspiel-perfekte Gleichgewichte $\{s^1, s^2, s^3, s^4\}$. Die Abbildung $\beta : \{s^1, s^2, s^3, s^4\} \to \mathcal{F}$, die jeder dieser Strategienkombinationen den terminalen Spielablauf zuordnet, der bei ihrer Ausführung erreicht wird, ist bijektiv. (Eine Begründung, daß der angegebene Spielbaum diese Eigenschaften erfüllt, ist nicht nötig.)

Name:

Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 5 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

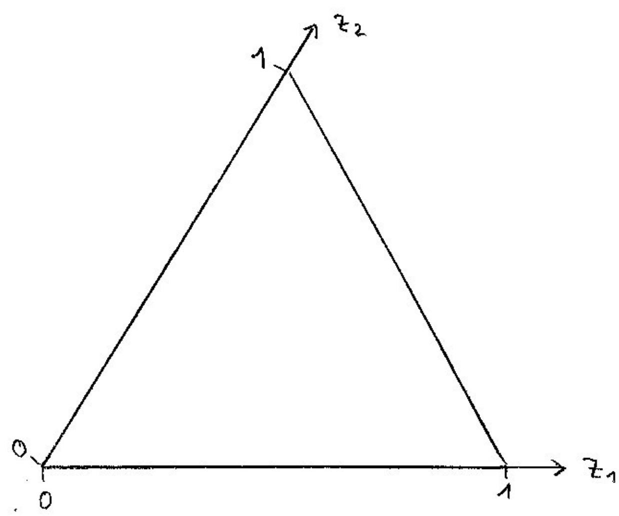
(a) (4P) Die folgende Tabelle zeigt die Koalitionsbewertung eines kooperativen 3-Personenspiels $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ in 0-1-reduzierter Form,

	$\emptyset$	1	2	3	1, 2	1, 3	2, 3	1, 2, 3
$\mathcal{V}(.)$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Ist das Spiel superadditiv? Ist es konvex? Begründen Sie Ihre Antworten. Die Menge der Zuteilungen ist hier

$$\mathcal{Z} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z_i \in [0,1], z_1 + z_2 + z_3 = 1\}.$$

Sie ist bijektiv zum Simplex $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, z_1, z_2, z_1 + z_2 \in [0,1]\}$, den das folgende Bild zeigt. Tragen Sie den Kern $\mathcal{K}$ des Spiels (genauer: sein Bild unter der Bijektion von $\mathcal{Z}$ auf den Simplex) in das Bild ein.



(b) (4P) Das Spiel "Rousseaus Hirschjagdparabel" ist das endliche 2-Personenspiel in Normalform mit $|S^1| = |S^2| = 2$ und mit der Auszahlungsmatrix

	s_1^2	s_2^2
s_1^1	(2,2)	(4,0)
s_2^1	(0,4)	(5,5)

Daraus wird folgendermaßen ein extensives Spiel mit $|\mathcal{B} - \mathcal{F}| = 3$ und $|\mathcal{F}| = 4$ gemacht: Erst wählt Spieler 1 s_1^1 oder s_2^1, danach wählt Spieler 2 s_1^2 oder s_2^2.

Geben Sie den Spielbaum an, mit Angabe des Spielers, der nach einem nicht terminalen Spielablauf am Zug ist, mit Angabe vom richtigen s_j^i an der Kante eines Spielzugs, und mit Angabe der Auszahlungswerte bei terminalen Spielabläufen. Geben Sie auch das zugehörige Spiel in Normalform an (Vorsicht, es ist nicht das Ausgangsspiel, sondern Spieler 2 hat nun 4 Strategien). Geben Sie für dieses Spiel alle Nash-Gleichgewichte und alle Teilspiel-perfekten Gleichgewichte an. (Begründungen sind nicht nötig.)

Name:
Matrikelnummer: Sitzplatz:

Aufgabe 6 (insgesamt 8 Punkte) erreicht:

(a) (4P) Sei $\mathcal{A} = \{1, 2, ..., m\}$. Für $B \subset \mathcal{A}$ wird ein Differenzenoperator

$$\delta_B : \mathrm{Abb}(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathbb{R})$$

definiert durch

$$(\delta_B(\mathcal{V}))(C) := \mathcal{V}(C \cup B) - \mathcal{V}(C - B) \quad \text{für } B, C \subset \mathcal{A},\ \mathcal{V} \in \mathrm{Abb}(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathbb{R}).$$

(Es ist $C - B = \{i \in \mathcal{A} \,|\, i \in C, i \notin B\}$.)

Zeigen Sie: Ein kooperatives Spiel $(\mathcal{A}, \mathcal{V})$ ist genau dann konvex , wenn gilt:

$$(\delta_B(\delta_C(\mathcal{V})))(D) \geq 0 \qquad \text{für alle } B, C, D \subset \mathcal{A}.$$

(b) (4P) Sei $(\mathcal{A}, S, U)$ ein 2-Personenspiel und ein Nullsummenspiel in Normalform mit $S^1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ kompakt und $S^2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ kompakt (für gewisse $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$), mit $U^1 : S^1 \times S^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und mit $\{\text{Nash-Gleichgewichte}\} \neq \emptyset$. Sei

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{\text{Nash-Gleichgewichte}\}, \\ B_2 &:= \{(s^1, s^2) \,|\, s^i \text{ ist maximin-Strategie des Spielers } i \text{ für } i = 1, 2\}. \end{aligned}$$

Gilt $B_1 \subset B_2$? $B_1 = B_2$? $B_1 \supset B_2$? $B_1 \not\subset B_2$ und $B_1 \not\supset B_2$? Begründen Sie Ihre Antwort.