

Lineare Algebra 2b
Frühjahrssemester 2011

Mannheim

Claus Hertling

21.04.2011

Inhaltsverzeichnis

11 Lineare Programmierung	119
12 Unitäre Vektorräume	133
13 Selbstadjungierte Endomorphismen	143
14 Orthogonale und unitäre Automorphismen	156

Die Vorlesung LA 2b ist eine Fortsetzung der Vorlesungen LA 1 im Herbstsemester 2010 und LA 2a/DMA im Frühjahrssemester 2011 in Mannheim. Die Notationen und Begriffe, die in diesen Vorlesungen entwickelt wurden, werden hier als bekannt vorausgesetzt.

Die Vorlesung LA 2b findet in den zweiten 7 (der 14) Wochen des Frühjahrssemesters 2011 statt. Zusammen mit der Vorlesung LA 2a/DMA in den ersten 7 Wochen gilt sie als eine volle Lineare Algebra 2 Vorlesung.

hertling@math.uni-mannheim.de

.

11 Lineare Programmierung

In diesem Kapitel wird ausschließlich mit dem Körper \mathbb{R} gearbeitet. Man könnte ihn aber durch einen beliebigen Unterkörper ersetzen, insbesondere durch \mathbb{Q} . In der linearen Programmierung betrachtet man lineare Gleichungen und lineare Ungleichungen zusammen, und man möchte den Wert einer linearen Funktion optimieren.

Beispiel 11.1 Vier Probleme: Gesucht sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit den Nebenbedingungen

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18,$$

so daß $c_1^{(J)}x_1 + c_2^{(J)}x_2$ maximal wird, mit $J \in \{F, S, H, W\}$ und

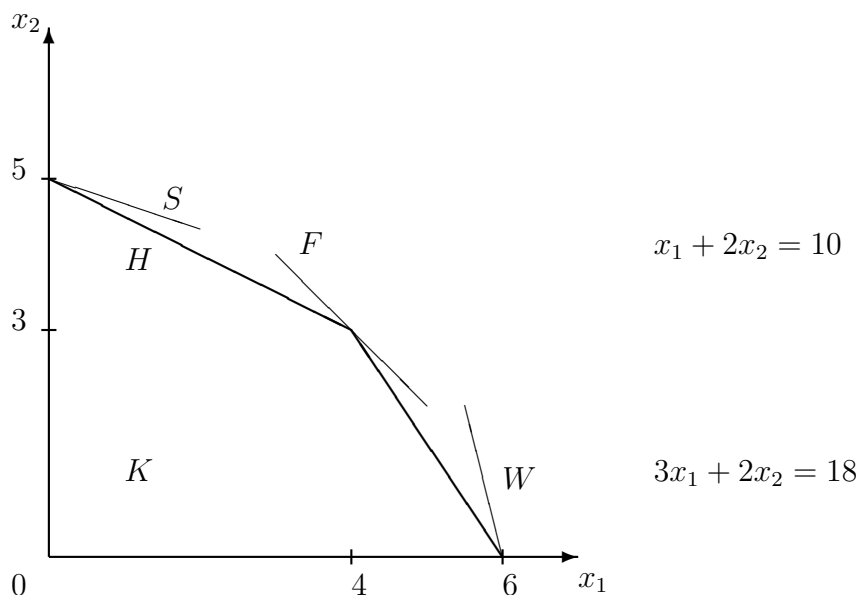
$$(c^{(F)}, c^{(S)}, c^{(H)}, c^{(W)}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann beispielsweise an eine Firma denken, die zwei begrenzte Ressourcen zur Verfügung hat und daraus zwei Produkte herstellen kann, mit unterschiedlichem Bedarf der Ressourcen. Sie möchte den Gewinn maximieren, wobei dieser Gewinn von der Jahreszeit $J \in \{F, S, H, W\}$ abhängt. Dann sind x_1 und x_2 die Mengen der beiden Produkte, die die Firma unter den gegebenen Randbedingungen produzieren kann/möchte.

Das folgende Bild zeigt die Menge

$$K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 \leq 10, \quad 3x_1 + 2x_2 \leq 18\}$$

der (x_1, x_2) , die die Nebenbedingungen erfüllen.



Die lineare Funktion

$$l^{(j)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto c_1^{(j)} x_1 + c_2^{(j)} x_2$$

gibt den Gewinn an, den man am Punkt (x_1, x_2) macht. Die Niveaulinien von $l^{(j)}$ sind Geraden. Unter allen Geraden, die K schneiden, muß man die mit maximalem Wert und ihren Schnitt mit K finden.

Lösungen:

	(x_1, x_2)	$c_1^{(j)} x_1 + c_2^{(j)} x_2$
F	$(4, 3)$	21
S	$(0, 5)$	15
H	$\{(0, 5) + \lambda \cdot (4, -2) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$	20
W	$(6, 0)$	24

K ist ein Viereck. Die maximale Gerade für H enthält eine Kante von K , die drei anderen maximalen Geraden enthalten jeweils nur einen Punkt von K .

Definition 11.2 (a) Notation: Sind $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(m \times n, \mathbb{R})$, so ist $A \geq B$ (bzw. $A \leq B$), falls für alle i und j gilt: $a_{ij} \geq b_{ij}$ (bzw. $a_{ij} \leq b_{ij}$). Insbesondere ist $A \geq 0$, falls für alle i und j gilt: $a_{ij} \geq 0$. Mit dieser Notation kann man mehrere (skalare) Ungleichungen zu einer (matrixwertigen) Ungleichung zusammenfassen.

(b) (Lineares Programm) Gegeben sind Matrizen $A^{(j)} \in M(m^{(j)} \times n, \mathbb{R})$ und Spaltenvektoren $b^{(j)} \in M(m^{(j)} \times 1, \mathbb{R})$ für $j \in \{+, 0, -\}$ und $c \in M(n \times 1, \mathbb{R})$. Ein *lineares Maximum-Programm* (bzw. *Minimum-Programm*) ist die Aufgabe, ein $x \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ zu finden, das die beiden Bedingungen erfüllt:

$$x \geq 0, A^{(+)} \cdot x \geq b^{(+)}, A^{(0)} \cdot x = b^{(0)}, A^{(-)} \cdot x \leq b^{(-)}, \quad (11.1)$$

$$c^{tr} \cdot x \quad \text{maximal (bzw. minimal)}. \quad (11.2)$$

Ein x , welches (11.1) erfüllt, heißt *zulässige Lösung*. Ein x , welches (11.1) und (11.2) erfüllt, heißt *optimale Lösung*.

(c) (Spezialfall Standardprogramm) Gegeben sind $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $b \in M(m \times 1, \mathbb{R})$ und $c \in M(n \times 1, \mathbb{R})$. Ein *Standard-Maximum-Programm* ist die Aufgabe, ein $x \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ zu finden mit

$$x \geq 0, A \cdot x \leq b, \quad (11.3)$$

$$c^{tr} \cdot x \quad \text{maximal}. \quad (11.4)$$

Ein *Standard-Minimum-Programm* ist die Aufgabe, ein $x \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ zu finden mit

$$x \geq 0, A \cdot x \geq b, \quad (11.5)$$

$$c^{tr} \cdot x \quad \text{minimal}. \quad (11.6)$$

(d) (Spezialfall kanonisches Programm) Gegeben sind $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $b \in M(m \times 1, \mathbb{R})$ und $c \in M(n \times 1, \mathbb{R})$. Ein *kanonisches Maximum-Programm* (bzw. *kanonisches Minimum-Programm*) ist die Aufgabe, ein $x \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ zu finden mit

$$x \geq 0, \quad A \cdot x = b, \quad (11.7)$$

$$c^{tr} \cdot x \quad \text{maximal (bzw. minimal)}. \quad (11.8)$$

Bemerkungen 11.3 (i) Die Menge K der $x \in M(n \times 1, \mathbb{R})$, die die Nebenbedingungen (11.1) bzw. (11.3) bzw. (11.5) bzw. (11.7) erfüllt, ist jeweils ein *konvexes Polyeder* (Definition in Beispiele/Lemma 11.7 (v)) oder leer. Zur Lösung eines linearen Programms muß man “bloß” diese Menge K und die lineare Funktion $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c^{tr} \cdot x$, betrachten und folgende Fragen beantworten:

(α) Ist $K \neq \emptyset$? Falls nein, so gibt es keine zulässige Lösung. Falls ja, so ist K die Menge der zulässigen Lösungen. Dann weiter zu (β).

(β) Sei $K \neq \emptyset$. Gibt es unter den Niveau-Hyperebenen $l^{-1}(r)$, $r \in \mathbb{R}$, die K schneiden, eine mit maximalem (bzw. minimalem) r ? Falls nein, so gibt es keine optimale Lösung. Falls ja, weiter zu (γ).

(γ) Sei $K \neq \emptyset$ und sei $t \in \mathbb{R}$ maximal (bzw. minimal) mit $l^{-1}(t) \cap K \neq \emptyset$. Dann ist $l^{-1}(t) \cap K$ die Menge der optimalen Lösungen. Wie findet man *auf effiziente Weise* t und einen Punkt in $l^{-1}(t) \cap K$?

(ii) Bei kleinem n und wenigen Nebenbedingungen kann man zu Fuß die Lösbarkeit und zulässige und optimale Lösungen bestimmen (falls sie existieren). Aber wenn man Probleme mit hunderten von Nebenbedingungen hat, braucht man einen Computer und einen guten Algorithmus. Der wichtigste Algorithmus ist der *Simplex-Algorithmus*. Seine Eigenschaften werden in Bemerkung 11.10 (ii) skizziert. Die Sätze 11.11 und 11.13 geben die Details. Allerdings wird der Simplex-Algorithmus hier nicht durch Beispiele unterlegt und nicht in eine geschliffene Form gebracht. (Wenn in einer anderen Veranstaltung mit dem Simplex-Algorithmus gearbeitet werden wird, wird er sowieso in neuer Gestalt erscheinen.)

(iii) Das neben dem Simplex-Algorithmus wichtigste Resultat der linearen Programmierung ist der sogenannte *Hauptsatz der linearen Programmierung*, der das Zusammenspiel von zwei verwandten Standard-Programmen beschreibt. Er wird in Satz 11.15 behandelt.

(iv) Vorher werden die logischen Beziehungen zwischen den verschiedenen Programmen diskutiert (Lemma 11.4), und es wird die Geometrie der konvexen Polyeder K erklärt (11.6–11.8).

Lemma 11.4 (a) Durch Vorzeichenwechsel in c und in $A^{(+)}$ und $b^{(+)}$ bzw. $A^{(-)}$ und $b^{(-)}$ kann man ein lineares Maximum-Programm in ein lineares Minimum-Programm umwandeln, und umgekehrt, und man kann einrichten, daß nur $A^{(+)}$ und $A^{(0)}$ auftreten (also $m^{(-)} = 0$) oder nur $A^{(0)}$ und $A^{(-)}$ (also $m^{(+)} = 0$). Genauso kann man Standard-Maximum-Programme in Standard-Minimum-Programme und kanonische Maximum-Programme in kanonische Minimum-Programme umwandeln, und umgekehrt.

(b) Gegeben sei ein lineares Maximum-Programm ohne $A^{(+)}$, also

$$x \geq 0, A^{(0)} \cdot x = b^{(0)}, A^{(-)} \cdot x \leq b^{(-)}, c^{tr} \cdot x \text{ maximal.} \quad (11.9)$$

Man kann es folgendermaßen in ein kanonisches Maximum-Programm umwandeln: Man führt Schlupfvariable $y = (y_1, \dots, y_{m^{(-)}})^{tr}$ ein und betrachtet das folgende Problem mit den Variablen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0, A^{(0)} \cdot x = b^{(0)}, A^{(-)} \cdot x + y = b^{(-)}, c^{tr} \cdot x \text{ maximal.} \quad (11.10)$$

Es ist äquivalent zu (11.9), und es ist äquivalent zum kanonischen Maximum-Programm

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} A^{(0)} & 0 \\ A^{(-)} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{(0)} \\ b^{(-)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}^{tr} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ maximal} \quad (11.11)$$

(wobei die Matrizen $0, \mathbf{1}, 0$ natürlich geeignete Größen haben sollen). Die Abbildung

$$M(n \times 1, \mathbb{R}) \rightarrow M((n + m^{(-)}) \times 1, \mathbb{R}), x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ b^{(-)} - A^{(-)} \cdot x \end{pmatrix}, \quad (11.12)$$

bildet die Menge der zulässigen bzw. optimalen Lösungen von (11.9) auf die Menge der zulässigen bzw. optimalen Lösungen von (11.10) ab.

c) Ein kanonisches Maximum-Programm (11.7)+(11.8) ist zu folgendem Standard-Maximum-Programm äquivalent,

$$x \geq 0, \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \cdot x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}, c^{tr} \cdot x \text{ maximal.} \quad (11.13)$$

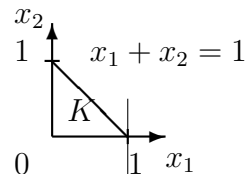
(d) Also lassen sich alle Typen von linearen Programmen ineinander umwandeln.

Beweis: (a), (c) und (d) sind klar (SKIZZE ZU (D) IN DER VORLESUNG). (b) Offenbar sind (11.10) und (11.11) äquivalent. In (11.10) sind die Schlupfvariablen y eindeutig durch $y = b^{(-)} - A^{(-)} \cdot x$ bestimmt. Substituiert man das in (11.10) und berücksichtigt $y \geq 0$, so erhält man (11.9). \square

Beispiele 11.5 (a) Das lineare Maximum-Programm mit $n = 2$, $m^{(+)} = 0$, $m^{(0)} = 0$, $m^{(-)} = 1$, $A^{(-)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b^{(-)} = 1$, $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$:

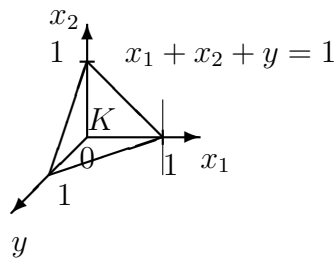
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \text{ maximal,}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1 \right\}, \quad K^{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$



(b) Lemma 11.4 (b) anwenden: Schlupfvariable $y = y_1$, äquivalentes kanonisches Maximum-Programm:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \geq 0, \quad x_1 + x_2 + y = 1, \quad x_1 \text{ maximal.}$$



Definition 11.6 (a) Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $K \neq \emptyset$ heißt *konvex*, falls sie mit je zwei Punkten auch die Strecke zwischen ihnen enthält. In Formeln:

$$x \in K \text{ und } y \in K \implies \{x + \lambda(y - x) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset K. \quad (11.14)$$

(b) Ein Punkt p einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Ecke* von K , falls er nicht im Inneren einer Strecke liegt, die ganz in K liegt. In Formeln:

$$p \text{ ist eine Ecke, falls gilt:}$$

$$p \in \{x + \lambda(y - x) \mid 0 < \lambda < 1\} \subset K \implies x = p = y. \quad (11.15)$$

Notation: $E(K) := \{p \in K \mid p \text{ ist Ecke von } K\}$.

(c) Eine Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^{tr} \cdot x = s\}$ mit einem $a \in M(n \times 1, \mathbb{R}) - \{0\}$ und einem $s \in \mathbb{R}$ heißt *Hyperebene* von K , eine Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^{tr} \cdot x \geq s\}$ heißt *Halbraum* von K .

Beispiele/Lemma 11.7 (i) Ein n -Eck im \mathbb{R}^2 ist konvex, falls alle Innenwinkel $\leq \pi$ (und dann automatisch $< \pi$) sind. Seine (naiven) Ecken sind seine Ecken im Sinne von Definition 11.5 (b).

(ii) Ein Ball $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, ist konvex, und sein Rand $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$ ist die Menge seiner Ecken.

(iii) Hyperebenen und Halbräume sind konvex. Sie haben keine Ecken.

(iv) Lemma: Der Schnitt von beliebig vielen konvexen Mengen ist konvex.

Beweis: klar. \square

(v) Also ist der Schnitt von endlich vielen Hyperebenen und Halbräumen konvex oder leer. Ist er nicht leer, so heißt er *konvexes Polyeder*.

(vi) Lemma: Die Menge $K = \{x \in M(n \times 1, \mathbb{R}) \mid x \text{ erfüllt (11.1)}\}$ der zulässigen Lösungen eines linearen Programms wie in (11.1)+(11.2) ist natürlich ein Schnitt von endlich vielen Hyperebenen und Halbräumen oder leer. Daher ist sie ein konvexes Polyeder oder leer.

(vii) Lemma: (a) Das gleiche gilt für die Menge $K^{opt} = \{x \in M(n \times 1, \mathbb{R}) \mid x \text{ erfüllt (11.1) und (11.2)}\}$ der optimalen Lösungen.

(b) Ist $K^{opt} \neq \emptyset$, so ist $K \neq \emptyset$ und $K^{opt} = K \cap l^{-1}(t)$ für ein $t \in \mathbb{R}$, bei $l : M(n \times 1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c^{tr} \cdot x$.

Beweis: (a) folgt aus (b), und (b) folgt aus der Definition. \square

(viii) Die Diskussion der Ecken der Mengen K und K^{opt} ist am übersichtlichsten im Fall, wenn das lineare Programm ein kanonisches Programm ist. Glücklicherweise kann man nach Lemma 11.4 (b) den allgemeinen Fall auf diesen Fall reduzieren: Die Abbildung in (11.12) bildet die Mengen K_1 und K_1^{opt} der zulässigen und der optimalen Punkte von (11.9) bijektiv auf die Mengen K_2 und K_2^{opt} der zulässigen und der optimalen Punkte von (11.11) ab. Und sie bildet Strecken auf Strecken ab. Daher bildet sie die Eckenmengen bijektiv aufeinander ab, $E(K_1)$ auf $E(K_2)$ und $E(K_1^{opt})$ auf $E(K_2^{opt})$.

(ix) Satz 11.8 (c) wird sagen, daß die Menge K der zulässigen Lösungen eines linearen Programms Ecken hat, wenn sie nicht leer ist. Das gilt nicht für beliebige konvexe Polyeder, zum Beispiel nicht für Halbräume, und auch nicht für Schnitte von bis zu $n - 1$ Halbräumen im \mathbb{R}^n (denn so ein Schnitt enthält durch jeden Punkt noch eine Gerade, warum?). Aber bei den zulässigen Lösungen hat man immer die n Ungleichungen $x \geq 0$. Die sind der Grund für die Existenz von Ecken. Und ihretwegen gibt es keine Gerade, die ganz in K liegt.

Satz 11.8 *Es sei ein kanonisches Minimum-Programm wie in (11.7)+(11.8) gegeben, und die Menge $K = \{x \in M(n \times 1, \mathbb{R}) \mid x \geq 0, A \cdot x = b\}$ der zulässigen Lösungen sei nicht leer. Die Menge der optimalen Lösungen*

wird mit K^{opt} bezeichnet. Die Spalten von A werden mit a_1, \dots, a_n bezeichnet, $a_1, \dots, a_n \in M(m \times 1, \mathbb{R})$.

(a) (Eine Charakterisierung der Ecken von K) Sei $p \in K$. Es gilt:

$$p \in E(K) \iff \begin{array}{l} \text{das Tupel der Spalten } (a_j \mid p_j > 0) \\ \text{ist linear unabhängig.} \end{array} \quad (11.16)$$

(b) $E(K)$ ist endlich.

(c) $E(K) \neq \emptyset$.

(d) Ist $K^{opt} \neq \emptyset$, so ist $E(K^{opt}) \neq \emptyset$, und es ist $E(K^{opt}) = K^{opt} \cap E(K)$.

Beweis: (a) Sei $p \in K$. Die Geraden durch p in $M(n \times 1, \mathbb{R})$ lassen sich in der Form $p + \mathbb{R} \cdot y$ mit $y \neq 0$ schreiben. Für so eine Gerade ist $K \cap (p + \mathbb{R} \cdot y)$ ein Punkt oder eine Strecke oder eine Halbgerade. Ein Punkt und eine Halbgerade haben je eine Ecke, eine Strecke hat zwei Ecken. Nach Definition 11.6 (b) gilt

$$\begin{array}{l} p \notin E(K) \\ \iff \text{Es gibt eine Gerade } p + \mathbb{R} \cdot y \text{ mit } p \notin E(K \cap (p + \mathbb{R} \cdot y)) \\ \text{(dann ist } K \cap (p + \mathbb{R} \cdot y) \text{ eine Strecke oder eine Halbgerade).} \end{array} \quad (11.17)$$

Sei $J(p) := \{j \in \{1, \dots, n\} \mid p_j > 0\}$ und

$$VR(J(p)) := \{x \in M(n \times 1, \mathbb{R}) \mid x_j = 0 \text{ für } j \notin J(p)\} \subset M(n \times 1, \mathbb{R}).$$

$K \cap VR(J(p))$ ist (auch) ein Polyeder, es ist Teil des Randes des Polyeders K , und es enthält p .

Ist $p + \mathbb{R} \cdot y$ eine Gerade durch p mit $p \notin E(K \cap (p + \mathbb{R} \cdot y))$, so ist $y_j = 0$ für $j \notin J(p)$, d.h. $p + \mathbb{R} \cdot y \subset VR(J(p))$. Daher ist

$$p \notin E(K) \iff p \notin E(K \cap VR(J(p))).$$

Es ist

$$K \cap VR(J(p)) = p + \{x \in VR(J(p)) \mid A \cdot x = 0, x \geq -p\},$$

und $\{x \in VR(J(p)) \mid A \cdot x = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $VR(J(p))$. Im Fall $(a_j \mid j \in J(p))$ linear unabhängig ist er gleich $\{0\}$, und es ist

$$\{p\} = K \cap VR(J(p)) = E(K \cap VR(J(p))), \quad \text{also } p \in E(K).$$

Im Fall $(a_j \mid j \in J(p))$ linear abhängig ist er ein Untervektorraum mit Dimension > 0 , und 0 ist wegen $p_j > 0$ für $j \in J(p)$ im Innern von

$\{x \in VR(J(p)) \mid A \cdot x = 0, x \geq -p\}$, also ist p im Innern von $K \cap VR(J(p))$, also $p \notin E(K \cap VR(J(p)))$, also $p \notin E(K)$.

(b) **Behauptung:** *Es gilt*

$$(x \in K \text{ und } x_j = 0 \text{ für } j \notin J(p)) \Rightarrow x = p.$$

Also ist p eindeutig durch $J(p)$ bestimmt.

Beweis: Es ist $\sum_{j \in J} a_j(p_j - x_j) = b - b = 0$. Weil die $a_j, j \in J(p)$, linear unabhängig sind, ist $p_j = x_j$ für alle $j \in J(p)$. \square

Wegen der Behauptung gibt es höchstens so viele Ecken von K wie Teilmengen J von $\{1, \dots, n\}$, also nur endlich viele.

(c) Sei $p \in K$ mit minimaler Menge $J(p)$. **Behauptung:** $p \in E(K)$.

Annahme (die widerlegt werden soll): $p \notin E(K)$.

Nach (11.17) gibt es dann eine Gerade $p + \mathbb{R} \cdot y$ mit $p \notin E(K \cap (p + \mathbb{R} \cdot y))$. Nach dem Beweis von (a) ist $y_j = 0$ für alle $j \notin J(p)$, d.h. $p + \mathbb{R} \cdot y \subset VR(J(p))$. Dort, wo die Gerade den Rand von $K \cap VR(J(p))$ in $VR(J(p))$ trifft, verschwindet (mindestens) eine weitere Koordinate. Denn

$$\text{Rand}(K \cap VR(J(p))) \subset \{x \in VR(J(p)) \mid \exists j \in J(p) \text{ mit } x_j = 0\}.$$

Also war $J(p)$ nicht minimal, Widerspruch zur Annahme. Also ist $p \in E(K)$, und $E(K) \neq \emptyset$.

(d) Sei $K^{opt} \neq \emptyset$. Es ist $K^{opt} = K \cap l^{-1}(t)$ für ein $t \in \mathbb{R}$ (bei $l(x) = c^{tr} \cdot x$). Man kann K^{opt} selber als Menge der zulässigen Lösungen eines neuen kanonischen Minimum-Programms deuten: Man fügt die Gleichung $c^{tr} \cdot x = t$ zu $A \cdot x = b$ hinzu und wählt eine beliebige neue lineare Minimum-Bedingung. Nun kann man (c) anwenden und erhält $E(K^{opt}) \neq \emptyset$.

Es bleibt $E(K^{opt}) = K^{opt} \cap E(K)$ zu zeigen. Äquivalent ist $K^{opt} - E(K^{opt}) = K^{opt} \cap (K - E(K))$.

Beweis von \subset : Sei $p \in K^{opt} - E(K^{opt})$. Dann liegt p im Innern einer Strecke, die in K^{opt} liegt. Sie liegt auch in K . Daher ist $p \notin E(K)$.

Beweis von \supset : Sei $p \in K^{opt} \cap (K - E(K))$. Dann liegt p im Innern einer Strecke, die in K liegt. Würde die Strecke nicht in K^{opt} liegen, so hätten die Punkte auf einer Seite (von p aus) dieser Strecke noch bessere Werte bezüglich l als p , ein Widerspruch zu $p \in K^{opt}$. Also liegt sie in K^{opt} , also ist $p \notin E(K)$. \square

Beispiel 11.9 Betrachtet wird das zu Beispiel 11.5 (b) äquivalente kanonische Minimum-Programm

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad -x_1 \text{ minimal.}$$

Es erfüllt

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1 \right\},$$

$$E(K) = \{p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$J(p^{(1)}) = \{1\}, J(p^{(2)}) = \{2\}, J(p^{(3)}) = \{3\},$$

$$K^{opt} = E(K^{opt}) = \{p^{(1)}\} \subset E(K).$$

Bemerkungen 11.10 (i) Der Satz macht es scheinbar einfach, optimale Lösungen zu finden: Die Menge K der zulässigen Lösungen hat nur endlich viele Ecken, und unter ihnen gibt es welche, die optimale Lösungen sind. Es reicht, eine solche Ecke zu finden.

Man könnte versuchen, alle Ecken von K zu bestimmen und ihre Werte unter l durchzutesten. Das funktioniert allerdings nicht gut, wenn die Eckenmenge sehr groß ist. Das ist oft der Fall.

(ii) Der *Simplex-Algorithmus* geht geschickter vor. Er startet mit einem kanonischen Minimum-Programm mit Menge K der zulässigen Lösungen (die leer sein könnte; auch das muß man mit dem Algorithmus herausfinden). Er besteht aus zwei Teilen.

2. Teil = Hauptteil: Man weiß $K \neq \emptyset$, und man hat eine Ecke von K in der Hand. Man führt einen algorithmischen Schritt mit 3 möglichen Ausgängen durch:

1. Ausgang: Man erfährt, daß die Ecke schon in K^{opt} liegt.
2. Ausgang: Man erfährt, daß $c^{tr} \cdot x$ beliebig kleine Werte annimmt und daß daher $K^{opt} = \emptyset$ ist.
3. Ausgang: Man findet eine neue Ecke mit einem fast immer kleineren Wert.

Man durchläuft diesen algorithmischen Schritt so oft, bis man entweder eine Ecke in K^{opt} gefunden hat oder $K^{opt} = \emptyset$ erfahren hat. Bloß das “(fast immer)” im 3. Ausgang ist unschön. Man muß aufpassen, daß man nicht in eine Schleife gerät. Aber das kann man vermeiden.

1. Teil: Man muß erst einmal feststellen, ob $K \neq \emptyset$ ist, und falls ja, eine Ecke von K finden. Das macht man, indem man auf geschickte Weise ein neues kanonisches Minimal-Programm definiert, das die folgenden guten Eigenschaften hat:

- (α) Man kennt a priori eine Ecke seiner zulässigen Lösungen \tilde{K} .

(β) Es hat optimale Lösungen, d.h. $\tilde{K}^{opt} \neq \emptyset$.

(γ) Einer beliebigen optimalen Lösung sieht man an, ob $K \neq \emptyset$ ist. Falls ja, hat man natürliche Bijektionen $K \leftrightarrow \tilde{K}^{opt}$ und $E(K) \leftrightarrow E(\tilde{K}^{opt})$.

Man wendet den 2. Teil auf das neue kanonische Programm an und findet entweder $K = \emptyset$ oder eine Ecke von K .

(iii) Im schlimmsten Fall weist der Simplex-Algorithmus exponentielle Laufzeit auf. Aber in der Praxis funktioniert er bestens, meistens ist die Anzahl der Schritte linear in den Eingangsdaten.

Der Simplex-Algorithmus wurde 1947 von Dantzig vorgeschlagen. 1979 wurde von Khachian ein anderes Verfahren, die *Ellipsoid-Methode* vorgeschlagen. Sie hat immer polynomiale Laufzeit in den Eingangsdaten. Später hat Karmarkar ein weiteres polynomiales Verfahren vorgeschlagen.

Satz 11.11 (2. Teil = Hauptteil des Simplex-Algorithmus)

Es sei ein kanonisches Minimum-Programm wie in (11.7)+(11.8) gegeben, und die Menge $K = \{x \in M(n \times 1, \mathbb{R}) \mid x \geq 0, A \cdot x = b\}$ der zulässigen Lösungen sei nicht leer. Sei $p \in E(K)$ und $J(p) := \{j \in \{1, \dots, n\} \mid p_j > 0\}$. Nach Satz 11.8 (a) ist $(a_j \mid j \in J(p))$ linear unabhängig.

Wähle ein $J_2 \subset \{1, \dots, n\}$ mit $J_2 \supset J(p)$, so daß $(a_j \mid j \in J_2)$ eine Basis von $\text{span}(a_j)_{j=1, \dots, n}$ ist. Sei $J_3 := \{1, \dots, n\} - J_2$. Dann gibt es eindeutige $\alpha_{j,i} \in \mathbb{R}$ für $j \in J_3$ und $i \in J_2$ mit

$$a_j = \sum_{i \in J_2} \alpha_{j,i} \cdot a_i \quad \text{für alle } j \in J_3.$$

Definiere

$$\delta_j := -c_j + \sum_{i \in J_2} c_i \cdot \alpha_{j,i} \in \mathbb{R} \quad \text{für } j \in J_3.$$

1. Fall, $\delta_j \leq 0$ für alle $j \in J_3$: Dann ist $p \in K^{opt}$.

2. Fall, es gibt $j \in J_3$ mit $\delta_j > 0$, und für alle solchen j ist $\alpha_{j,i} \leq 0$ für alle $i \in J_2$: Dann ist die Abbildung $K \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c^{tr} \cdot x$, nach unten unbeschränkt. Daher ist dann $K^{opt} = \emptyset$.

3. Fall, es gibt ein $r \in J_3$ mit $\delta_r > 0$ und ein $i \in J_2$ mit $\alpha_{r,i} > 0$: Dann kann man ein $s \in J_2$ wählen mit $\alpha_{r,s} > 0$ und

$$\frac{p_s}{\alpha_{r,s}} = \min\left(\frac{p_i}{\alpha_{r,i}} \mid i \in J_2, \alpha_{r,i} > 0\right).$$

Man definiert $q \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ durch

$$q_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \in J_3 - \{r\} \\ \frac{p_s}{\alpha_{r,s}} & \text{falls } i = r \\ p_i - \frac{\alpha_{r,i}}{\alpha_{r,s}} \cdot p_s & \text{falls } i \in J_2. \end{cases}$$

Dann ist $q \in E(K)$ und $c^{tr} \cdot q \leq c^{tr} \cdot p$ und

$$c^{tr} \cdot q = c^{tr} \cdot p \iff p_s = 0.$$

Beweis: Sei $x \in K$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= b - b = A \cdot x - A \cdot p = \sum_{j=1}^n a_j \cdot x_j - \sum_{j \in J_2} a_j \cdot p_j \\ &= \sum_{j \in J_2} a_j \cdot (x_j - p_j) + \sum_{j \in J_3} \left(\sum_{i \in J_2} \alpha_{j,i} \cdot a_i \right) \cdot x_j \\ &= \sum_{j \in J_2} a_j \cdot (x_j - p_j) + \sum_{i \in J_2} a_i \cdot \sum_{j \in J_3} \alpha_{j,i} \cdot x_j \\ &= \sum_{j \in J_2} a_j \cdot \left(x_j - p_j + \sum_{i \in J_3} \alpha_{i,j} \cdot x_i \right). \end{aligned}$$

Weil die $(a_j \mid j \in J_2)$ linear unabhängig sind, ist

$$x_j = p_j - \sum_{i \in J_3} \alpha_{i,j} \cdot x_i \quad \text{für } j \in J_2.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} c^{tr} \cdot x &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j = \sum_{j \in J_2} c_j \cdot x_j + \sum_{j \in J_3} c_j \cdot x_j \\ &= \sum_{j \in J_2} c_j \cdot p_j - \sum_{j \in J_2} c_j \cdot \sum_{i \in J_3} \alpha_{i,j} \cdot x_i + \sum_{j \in J_3} c_j \cdot x_j \\ &= c^{tr} \cdot p + \sum_{j \in J_3} x_j \cdot \left(c_j - \sum_{i \in J_2} c_i \cdot \alpha_{j,i} \right) \\ &= c^{tr} \cdot p - \sum_{j \in J_3} \delta_j \cdot x_j. \end{aligned}$$

1. Fall: Nun klar.

2. Fall: Wähle ein $r \in J_3$ mit $\delta_r > 0$. Betrachte die Halbgerade $p + \mathbb{R}_0^+ \cdot y$ mit

$$y_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \in J_3 - \{r\} \\ 1 & \text{falls } i = r \\ -\alpha_{r,i} \geq 0 & \text{falls } i \in J_2. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A \cdot y &= a_r + \sum_{i \in J_2} a_i \cdot (-\alpha_{r,i}) = a_r - a_r = 0, \\ y &\geq 0, \quad \text{also } p + \lambda \cdot y \geq p \geq 0 \quad \text{für } \lambda \geq 0, \end{aligned}$$

also

$$p + \mathbb{R}_0^+ \cdot y \subset K.$$

Aber

$$c^{tr} \cdot (p + \lambda \cdot y) = c^{tr} \cdot p + \lambda \cdot (c_r + \sum_{i \in J_2} c_j \cdot (-\alpha_{r,i})) = c^{tr} \cdot p - \lambda \cdot \delta_r.$$

ist für $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$ nach unten unbeschränkt. Also ist $K^{opt} = \emptyset$.

3. Fall: Mit den Notationen vom 2. Fall ist

$$q = p + \frac{p_s}{\alpha_{r,s}} \cdot y \in p + \mathbb{R}_0^+ \cdot y.$$

Wegen $\frac{p_s}{\alpha_{r,s}} = \min(\dots)$ ist $q_i \geq 0$ für $i \in J_2$, und es ist $q_r \geq 0$, daher ist $q \geq 0$. Mit den Rechnungen vom 2. Fall ist $A \cdot q = b$, also $q \in K$, und

$$c^{tr} \cdot q = c^{tr} \cdot p - \frac{p_s}{\alpha_{r,s}} \cdot \delta_r \leq c^{tr} \cdot p,$$

und

$$c^{tr} \cdot q = c^{tr} \cdot p \iff p_s = 0.$$

Es ist $q_s = 0$. Um $q \in E(K)$ zu sehen, reicht es wegen Satz 11.8 und wegen

$$\{j \in \{1, \dots, n\} \mid q_j > 0\} \subset (J_2 - \{s\}) \cup \{r\}$$

zu zeigen, daß $(a_j \mid j \in (J_2 - \{s\}) \cup \{r\})$ linear unabhängig ist. Aber das gilt denn $(a_j \mid j \in J_2)$ ist linear unabhängig, und $a_r = \sum_{i \in J_2} \alpha_{r,i} \cdot a_i$ mit $\alpha_{r,s} > 0$.
□

Bemerkungen 11.12 (i) Es ist denkbar, daß man beim (Hauptteil des) Simplexverfahrens in jedem Schritt im 3. Fall landet und in eine Schleife gerät und der Algorithmus nicht stoppt. Das kann man vermeiden. Man kann auf verschiedene Weisen Zusatzregeln bei der Wahl von r und s im 3. Fall aufstellen, die dafür sorgen, daß man nicht mehrfach dieselbe Ecke q erreicht. Dann kommt man in keine Schleife, und der Algorithmus stoppt irgendwann mit dem 1. Fall, weil $E(K)$ endlich ist.

Die möglichen Zusatzregeln werden hier nicht diskutiert.

(ii) Bei einem kanonischen Minimum-Programm wie in (11.7)+(11.8) kann man durch Vorzeichenänderungen in Zeilen von A und Einträgen von b erreichen, daß $b \geq 0$ ist. Das ist in Satz 11.13 relevant.

Satz 11.13 (1. Teil des Simplex-Algorithmus) *Es sei ein kanonisches Minimum-Programm wie in (11.7)+(11.8) gegeben. Sei $b \geq 0$. Man definiert ein neues kanonisches Minimum-Programm*

$$\tilde{x} \geq 0, \quad \tilde{A} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}, \tag{11.18}$$

$$\tilde{c}^{tr} \cdot \tilde{x} \quad \text{minimal}, \tag{11.19}$$

mit $\tilde{A} \in M(m \times \tilde{n}, \mathbb{R})$, $\tilde{b} \in M(m \times 1, \mathbb{R})$, $\tilde{c} \in M(\tilde{n} \times 1, \mathbb{R})$, durch

$$\tilde{n} = n + m, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = (A \quad E_m), \quad \tilde{b} = b, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ \mathbf{1}_{m \times 1} \end{pmatrix}. \quad (11.20)$$

Dann gilt:

(α) $\tilde{p} := \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ ist eine Ecke seiner zulässigen Lösungen \tilde{K} .

(β) Es hat optimale Lösungen, d.h. $\tilde{K}^{opt} \neq \emptyset$.

(γ) $K \neq \emptyset \iff$ für beliebiges $\tilde{q} \in \tilde{K}^{opt}$ ist $\tilde{c}^{tr} \cdot \tilde{q} = 0$. In dem Fall ist

$$\tilde{K}^{opt} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in K \right\} \quad \text{und} \quad E(\tilde{K}^{opt}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in E(K) \right\}.$$

Beweis: (α) $\tilde{p} \geq 0$ wegen $b \geq 0$. Und $\tilde{A} \cdot \tilde{p} = E_m \cdot b = b$. Also ist $\tilde{p} \in \tilde{K}$. Wegen Satz 11.8 (a), und weil die Spalten von E_m linear unabhängig sind, ist $\tilde{p} \in E(\tilde{K})$.

(β) Die Abbildung $\tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{x} \mapsto \tilde{c}^{tr} \cdot \tilde{x}$, ist nach unten beschränkt, ihr Bild ist in \mathbb{R}_0^+ wegen $\tilde{x} \geq 0$ und $\tilde{c}^{tr} \cdot \tilde{x} = \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i$. Wenn man nun den 2. Teil des Simplex-Algorithmus (Satz 11.11) auf \tilde{K} anwendet, so ist daher in jedem Schritt der 2. Fall unmöglich. Daher führt der Simplex-Algorithmus zu einer optimalen Lösung.

(γ) (11.18)–(11.20) kann man in der folgenden Gestalt mit $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ schreiben,

$$x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad A \cdot x + z = b, \quad \tilde{c}^{tr} \cdot \tilde{x} = \sum_{i=1}^m z_i \quad \text{minimal.}$$

Also ist $K \neq \emptyset$ äquivalent zu $\sum_{i=1}^m z_i = 0$ für optimale Lösungen $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ in \tilde{K} , und das ist äquivalent zu $z = 0$. Der Rest ist klar. \square

Definition 11.14 (I) bezeichnet das Standard-Maximum-Programm

$$x \geq 0, \quad A \cdot x \leq b, \quad c^{tr} \cdot x \quad \text{maximal.} \quad (11.21)$$

Dann ist das folgende Standard-Minimum-Programm das zu (I) *duale Programm*.

$$y \geq 0, \quad A^{tr} \cdot y \geq c, \quad b^{tr} \cdot y \quad \text{minimal.} \quad (11.22)$$

Es wird mit (I)* bezeichnet. Das lineare Programm (I) wird in dieser Situation auch als das *primale Programm* bezeichnet.

Bei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $b \in M(m \times 1, \mathbb{R})$, $c \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ sind x und y Spaltenvektoren der Länge n bzw. m .

Satz 11.15 (*Hauptsatz der linearen Programmierung*) Seien (I) und $(I)^*$ wie in Definition 11.14. Folgende Aussagen sind äquivalent.

- (i) (I) und $(I)^*$ haben zulässige Lösungen.
- (ii) (I) und $(I)^*$ haben optimale Lösungen.
- (iii) (I) hat (mindestens) eine optimale Lösung.
- (iv) $(I)^*$ hat (mindestens) eine optimale Lösung.

Wenn diese Aussagen erfüllt sind, haben (I) und $(I)^*$ denselben optimalen Wert (Maximum $c^{tr} \cdot x =$ Minimum $b^{tr} \cdot y$).

Beweis: In dieser Vorlesung wird nur ein Teil des Satzes bewiesen. Vollständige Beweise findet man zum Beispiel im Buch “Diskrete Mathematik” von M. Aigner und im Vorlesungsmanuskript zur DMA im FS07 (Mannheim) von H.-P. Butzmann.

Die Richtungen (ii) \Rightarrow (i), (ii) \Rightarrow (iii) und (ii) \Rightarrow (iv) sind trivial.

Beweis von (i) \Rightarrow (ii): Seien p und q zulässige Lösungen von (I) bzw. $(I)^*$. Wegen $p \geq 0$, $q \geq 0$, $A \cdot p \leq b$ und $A^{tr} \cdot q \geq c$ gilt dann

$$c^{tr} \cdot p \leq (A^{tr} \cdot q)^{tr} \cdot p = q^{tr} \cdot A \cdot p \leq q^{tr} \cdot b = b^{tr} \cdot q. \quad (11.23)$$

Daher sind die Werte der zulässigen Lösungen von (I) nach oben beschränkt, und die Werte der zulässigen Lösungen von $(I)^*$ sind nach unten beschränkt. Daher ist im Simplex-Algorithmus, 2. Teil (für äquivalente kanonische Programme), der 2. Ausgang jeweils unmöglich. Daher besitzen (I) und $(I)^*$ optimale Lösungen. Das zeigt (i) \Rightarrow (ii).

Die Richtungen (iii) \Rightarrow (i) und (iv) \Rightarrow (i) und die Aussage, daß die optimalen Werte gleich sind, wenn (i)–(iv) gelten, werden hier nicht gezeigt. Dazu braucht man das *Lemma von Farkas*. \square

Bemerkung 11.16 Um den Satz richtig würdigen zu können, muß man eine Reihe von Anwendungen vor Augen haben. Im Buch von M. Aigner werden in Kapitel 13.3 mehrere Anwendungen gegeben; allerdings beruhen sie auf ausführlichen Diskussionen in früheren Kapiteln.

12 Unitäre Vektorräume

In diesem Kapitel wird hauptsächlich mit dem Körper \mathbb{C} gearbeitet. Auf \mathbb{C} hat man die komplexe Konjugation $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$. Mit ihr kann man Linearformen und Bilinearformen twisten.

Definition 12.1 Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum.

a) (Erinnerung, vgl. Beispiel 9.2 iii)) Eine Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ ist *linear*, also eine *Linearform*, wenn sie ein Vektorraumhomomorphismus ist, d.h. wenn sie erfüllt:

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(v) + f(w) \text{ (Additivität),} \\ f(\lambda \cdot v) &= \lambda \cdot f(v) \text{ (Linearität bezüglich skalarer Multiplikation).} \end{aligned}$$

Hier sind $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Eine Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ ist *semilinear*, wenn sie erfüllt:

$$\begin{aligned} f(v+w) &= f(v) + f(w) \text{ (Additivität),} \\ f(\lambda \cdot v) &= \bar{\lambda} \cdot f(v) \text{ (Semilinearität bezüglich skalarer Multiplikation).} \end{aligned}$$

[*semi* \sim ein halb.]

c) Eine Abbildung $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ist *sesquilinear* wenn sie im linken Argument linear und im rechten semilinear ist, d.h. wenn für jedes $y \in V$ die Abbildung

$$\phi(\cdot, y) : V \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \phi(x, y)$$

linear ist und wenn für jedes $x \in V$ die Abbildung

$$\phi(x, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{C}, \quad y \mapsto \phi(x, y)$$

semilinear ist. Eine sesquilineare Abbildung heißt auch *Sesquilinearform*.

[*sesqui* \sim anderthalb.]

d) Eine Sesquilinearform $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *hermitesch*, falls gilt:

$$\phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)} \text{ für alle } x, y \in V$$

(dann ist $\phi(x, x) \in \mathbb{R}$ wegen $\phi(x, x) = \overline{\phi(x, x)}$).

e) Eine hermitesche Sesquilinearform $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *positiv definit* [bzw. *negativ definit*], falls gilt:

$$\phi(x, x) > 0 \quad [\text{bzw. } < 0] \quad \text{für alle } x \in V - \{0\}.$$

f) Ein \mathbb{C} -Vektorraum V zusammen mit einer positiv definiten hermiteschen Sesquilinearform $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *unitärer Vektorraum*. Die Sesquilinearform ϕ ist sein *Skalarprodukt*. Die *Norm* (oder *Länge*) eines Vektors v ist

$$\|v\| := \sqrt{\phi(v, v)} \geq 0.$$

Bemerkungen 12.2 i) Sesquilinearformen sind eng verwandt mit Bilinearformen über dem Körper \mathbb{R} . *Hermiteisch* bei Sesquilinearformen ist das Analogon zu *symmetrisch* bei Bilinearformen. Es gilt der

1. Meta-Satz: Alle Konstruktionen und Resultate, die in Kapitel 9 und 10 für symmetrische Bilinearformen über \mathbb{R} ausgeführt wurden, lassen sich mit kleinen Modifikationen auch für hermitesche Sesquilinearformen ausführen.

ii) *Unitärer Vektorraum* ist das Analogon bei $K = \mathbb{C}$ zum *Euklidischen Vektorraum* bei $K = \mathbb{R}$. Es gilt der

2. Meta-Satz: Abgesehen von der Definition des Winkels lassen sich alle Konstruktionen und alle Resultate, die in Kapitel 10 für Euklidische Vektorräume ausgeführt wurden, mit kleinen Modifikationen auch für unitäre Vektorräume ausführen.

iii) Diese beiden Meta-Sätze müßten natürlich bewiesen werden, indem man alle Konstruktionen und Beweise durchgeht und gegebenenfalls modifiziert. Unten werden die wichtigsten Aussagen mit ihren Modifikationen diskutiert.

iv) Bei einer hermiteschen Sesquilinearform ϕ ist $\phi(v, v) = \overline{\phi(v, v)}$, also $\phi(v, v) \in \mathbb{R}$. Nur deshalb hat ϕ eine Chance, positiv definit zu sein.

v) Bei der Definition des Winkels in Kapitel 10 (Definition 10.6) war $\phi(x, y) \in \mathbb{R}$ für alle $x, y \in V$ wichtig gewesen. Das ist bei hermiteschen Sesquilinearformen nicht erfüllt.

Beispiele 12.3 i) Der wichtigste unitäre Vektorraum ist der \mathbb{C}^n mit dem Standardskalarprodukt $\phi_{st, \mathbb{C}}$,

$$\phi_{st, \mathbb{C}} : ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \xrightarrow{\phi_{st, \mathbb{C}}} (x_1 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$$

ii) Der \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ mit der Sesquilinearform $\phi_{int, \mathbb{C}}$,

$$\phi_{int, \mathbb{C}} : (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx,$$

ist ein unitärer Vektorraum wegen (Beweis: Analysis)

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx > 0, \text{ falls } f \neq 0.$$

iii) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$ definiert (offenbar) eine Sesquilinearform Sesq_A auf $M(n \times 1, \mathbb{C})$ durch

$$(x, y) \mapsto x^{tr} \cdot A \cdot \overline{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot a_{ij} \cdot \overline{y_j}.$$

Definition/Satz 12.4 (\sim 9.3 und 9.5 c)) (Matrizen und Sesquilinearformen)

Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum; sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V .

a) (Definition) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ definiert offenbar eine Sesquilinearform auf $V \times V$ durch

$$\text{Sesq}_{A, \mathcal{B}, \mathcal{B}} : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i b_i, \sum_{j=1}^n y_j b_j \right) \mapsto (x_1 \cdots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot a_{ij} \cdot \overline{y_j}.$$

b) (Definition) Für jede Sesquilinearform $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ist $M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$ die Matrix mit den Einträgen

$$(M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}))_{ij} := \phi(b_i, b_j).$$

c) (Satz) Die Menge

$$\text{Sesq}(V, V) := \{ \phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \text{ Sesquilinearform} \}$$

ist ein \mathbb{C} -Vektorraum, und die Abbildung

$$M(n \times n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Sesq}(V, V), \quad A \mapsto \text{Sesq}_{A, \mathcal{B}, \mathcal{B}},$$

ist ein Vektorraumisomorphismus. Der inverse Vektorraumisomorphismus ist

$$\text{Sesq}(V, V) \rightarrow M(n \times n, \mathbb{C}), \quad \phi \mapsto M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}).$$

d) (Satz) (Transformationsverhalten von Matrizen zu Sesquilinearformen bezüglich Basiswechsel)

Sei \mathcal{B}' eine weitere Basis von V . Dann ist

$$M(\mathcal{B}', \phi, \mathcal{B}') = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{tr} \cdot M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) \cdot \overline{M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')}$$

e) (Definition) Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt hermitesch, falls

$$A = \overline{A}^{tr}$$

ist. Hier ist $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ bei $A = (a_{ij})$.

f) (Satz) Eine Matrix A ist genau dann hermitesch, wenn Sesq_A (Definition in Beispiel 12.3 iii)) hermitesch ist.

Beweis: a) – d) Wie Satz 9.3.

e) (Definition).

f) e_i bezeichnet den i -ten Standardbasisvektor in $M(n \times 1, \mathbb{C})$. Nach Definition ist $\text{Sesq}_A(e_i, e_j) = a_{ij}$. Also gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Sesq}_A \text{ ist hermitesch} \\ \iff & \text{Sesq}_A(e_j, e_i) = \overline{\text{Sesq}_A(e_i, e_j)} \\ \iff & a_{ji} = \overline{a_{ij}} \\ \iff & A^{tr} = \overline{A} \\ \iff & A \text{ ist hermitesch.} \end{aligned}$$

□

Definition 12.5 Sei $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Sesquilinearform auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V .

a) (Definition) Zwei Elemente $x, y \in V$ heißen **orthogonal**, falls $\phi(x, y) = 0$ ist. Notation: $x \perp y$.

b) (Triviales Lemma) Weil ϕ hermitesch ist, ist $x \perp y \iff y \perp x$.

c) (Definition) Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Der **orthogonale** Untervektorraum $U^\perp \subset V$ ist

$$U^\perp := \{x \in V \mid \text{für alle } y \in U \text{ ist } x \perp y\}.$$

d) (Definition) Das **Radikal** von ϕ ist $\text{Rad}(\phi) := V^\perp \subset V$.

e) (Definition) ϕ heißt **nichtentartet**, falls $\text{Rad}(\phi) = \{0\}$. Falls $\text{Rad}(\phi) \neq \{0\}$ ist, heißt ϕ **entartet**.

f) (Definition) Ein Element $v \in V$ heißt **isotrop**, falls es erfüllt:

$$\phi(v, v) = 0 \quad \text{und} \quad v \neq 0.$$

g) (Triviales Lemma) Offenbar ist jedes Element von $\text{Rad}(\phi) - \{0\}$ isotrop.

Lemma 12.6 (~ 9.8)

Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum, $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Sesquilinearform, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $A := M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B})$.

a) Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum. Sei $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_k)$ eine Basis von U und $\Gamma = (\gamma_{ij})$ die $(n \times k)$ -Matrix mit $c_j = \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} b_i$. Dann ist

$$\text{rang } \Gamma = k \geq \text{rang}(\Gamma^{tr} \cdot A),$$

$$U^\perp = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i b_i \mid \Gamma^{tr} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i b_i \mid \overline{\Gamma}^{tr} \cdot \overline{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

$$\dim U^\perp = n - \text{rang}(\Gamma^{tr} \cdot A) \geq n - k = n - \dim U,$$

$$\dim U^\perp + \dim U \geq n.$$

b) Insbesondere ist

$$\text{Rad}(\phi) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i b_i \mid \bar{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

$$\dim \text{Rad}(\phi) = n - \text{rang } \bar{A} = n - \text{rang } A.$$

c) ϕ ist nichtentartet $\iff \det A \neq 0$.

d) Wenn ϕ nichtentartet ist, ist

$$\dim U^\perp + \dim U = n.$$

e) Wenn es keine isotropen Vektoren gibt ($\Rightarrow \text{Rad}(\phi) = \{0\} \Rightarrow \phi$ ist nichtentartet), ist $U \cap U^\perp = \{0\}$ und

$$U \oplus U^\perp = V.$$

Beweis: Wie Lemma 9.8, mit einer Komplikation: Man hat eine komplexe Konjugation in der Rechnung

$$\phi(c_j, \sum_{i=1}^n x_i b_i) = (\gamma_{1j} \cdots \gamma_{nj}) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}.$$

Das $= 0$ setzen gibt ein "semilineares" Gleichungssystem. Durch komplexe Konjugation erhält man ein lineares Gleichungssystem. \square

Bemerkungen 12.7 i) Weil A hermitesch ist, kann man im Gleichungssystem für U^\perp in a) \bar{A} durch A^{tr} ersetzen.

ii) Sind $A, T \in M(n \times n, \mathbb{C})$ und ist A hermitesch, so ist auch die Matrix $T^{tr} \cdot A \cdot \bar{T}$ hermitesch, denn

$$\overline{(T^{tr} \cdot A \cdot \bar{T})^{tr}} = (\bar{T}^{tr} \cdot \bar{A} \cdot T)^{tr} = T^{tr} \cdot \bar{A}^{tr} \cdot \bar{T} = T^{tr} \cdot A \cdot \bar{T}.$$

Definition 12.8 (\sim 10.11) Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$.

Eine Basis (b_1, \dots, b_n) heißt *Orthogonalbasis*, falls $b_i \perp b_j$ für $i \neq j$ ist.

Eine Basis (b_1, \dots, b_n) heißt *Orthonormalbasis* oder kürzer *ON-Basis*, falls $b_i \perp b_j$ für $i \neq j$ und $\|b_i\| = 1$ für alle i ist. Die gleiche Bedingung kürzer geschrieben:

$$\phi(b_i, b_j) = \delta_{ij}.$$

Satz 12.9 (\sim 10.12) (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)
 Nun ist V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$.

Mit den gleichen Formeln wie in 10.12 b) erhält man eine Orthogonalbasis von V . Durch Normieren erhält man eine Orthonormalbasis von V . Auch die Formeln in 10.12 d), mit denen die Koeffizienten eines beliebigen Vektors bezüglich einer Orthogonalbasis berechnet werden, bleiben ohne Änderung gültig.

Beweis: Wie 10.12. □

Beispiel 12.10 Sei V ein zwei-dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (a_1, a_2)$ und mit Skalarprodukt ϕ mit

$$M(\mathcal{A}, \phi, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 2 & -3i \\ 3i & 5 \end{pmatrix},$$

d.h. $\phi(a_1, a_1) = 2$, $\phi(a_2, a_2) = 5$, $\phi(a_2, a_1) = 3i$, $\phi(a_1, a_2) = -3i$. Man wendet das Gram-Schmidt-Verfahren an:

$$\begin{aligned} b_1 &:= a_1, \\ b_2 &:= a_2 - \frac{\phi(a_2, b_1)}{\phi(b_1, b_1)} \cdot b_1 = a_2 - \frac{\phi(a_2, a_1)}{\phi(a_1, a_1)} \cdot a_1 \\ &= a_2 - \frac{3i}{2} \cdot a_1. \end{aligned}$$

Normieren:

$$\begin{aligned} \|b_1\|^2 &= \phi(b_1, b_1) = \phi(a_1, a_1) = 2, \\ c_1 &:= \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_1, \\ \|b_2\|^2 &= \phi(b_2, b_2) = \phi\left(a_2 - \frac{3i}{2} \cdot a_1, a_2 - \frac{3i}{2} \cdot a_1\right) \\ &= \phi(a_2, a_2) - \frac{3i}{2} \cdot \phi(a_1, a_2) - \frac{\overline{3i}}{2} \cdot \phi(a_2, a_1) \\ &\quad - \frac{3i}{2} \cdot \frac{\overline{3i}}{2} \cdot \phi(a_1, a_1) \\ &= 5 - \frac{3i}{2} \cdot (-3i) - \frac{-3i}{2} \cdot 3i + \frac{9}{4} \cdot 2 \\ &= 5 - \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} (> 0), \\ c_2 &:= \frac{b_2}{\|b_2\|} = \sqrt{2} \cdot b_2. \end{aligned}$$

Satz 12.11 (*~ 10.5*) (*Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*)

Sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\phi(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ für } x, y \in V,$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

Beweis: Hier ist der Beweis für unitäre Vektorräume etwas komplizierter als der für Euklidische Vektorräume in 10.5.

Falls $x = 0$ oder $y = 0$ ist, sind beide Seiten gleich Null, und x und y sind linear abhängig.

Seien $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Im Fall $\phi(x, y) = 0$ sind x und y nicht linear abhängig, und es ist $\|x\| \cdot \|y\| > 0 = |\phi(x, y)|$. Dann ist nichts mehr zu zeigen.

Sei also im folgenden $\phi(x, y) \neq 0$. Dann haben die Vektoren $\frac{x}{\|x\|}$ und $\frac{y}{\|y\|}$ Länge 1. Es ist für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi\left(\frac{x}{\|x\|} + \lambda \cdot \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} + \lambda \cdot \frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= \phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) + \left(\bar{\lambda} \cdot \phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) + \lambda \cdot \phi\left(\frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|}\right)\right) + \lambda \bar{\lambda} \cdot \phi\left(\frac{y}{\|y\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \\ &= 1 + 2 \cdot \Re\left(\bar{\lambda} \cdot \phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right) + \lambda \bar{\lambda}. \end{aligned}$$

Es gibt ein eindeutiges $\lambda_0 \in S^1$ (d.h. $|\lambda_0| = 1$) mit $\arg \lambda_0 = \pi + \arg(\phi(x, y))$ und daher $\bar{\lambda}_0 \cdot \phi(x, y) = -|\phi(x, y)|$. Es ist

$$0 \leq 1 + 2 \cdot \Re\left(\bar{\lambda}_0 \cdot \phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right) + \lambda_0 \bar{\lambda}_0 = 2 - 2 \left| \phi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \right|$$

also

$$|\phi(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Bei Gleichheit ist

$$0 = \phi\left(\frac{x}{\|x\|} + \lambda_0 \cdot \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} + \lambda_0 \cdot \frac{y}{\|y\|}\right),$$

also

$$\frac{x}{\|x\|} + \lambda_0 \cdot \frac{y}{\|y\|} = 0.$$

Dann sind x und y linear abhängig. Daß umgekehrt Gleichheit gilt, wenn x und y linear abhängig sind, ist klar. \square

Definition/Korollar 12.12 ($\sim 10.7 - 10.9$) (Norm und Metrik)

Sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ .

a) (Definition) Eine Norm auf einem \mathbb{C} -Vektorraum ist eine Abbildung $\nu : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit den Eigenschaften (N1), (N2) (für $\lambda \in \mathbb{C}$) und (N3) von Definition 10.7; d.h. sie ist praktisch genauso definiert wie eine Norm auf einem \mathbb{R} -Vektorraum.

b) (Korollar) Die Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \sqrt{\phi(x, x)},$$

ist eine Norm auf V . Die Abbildung

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+, (x, y) \mapsto \|x - y\|,$$

ist eine Metrik auf V .

Beweis: Wie 10.8 und 10.9. □

Satz 12.13 (Hauptminorenkriterium)

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix.

a) (Definition) A heißt positiv definit, wenn Sesq_A (Definition in Beispiel 12.3 iii)) positiv definit ist.

b) (Definition) Die Hauptminoren der Matrix A sind die Determinanten $\det A_k$ der Untermatrizen

$$A_k := (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k} \in M(k \times k, \mathbb{R}) \text{ für } k = 1, 2, \dots, n.$$

c) (Satz) A ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind.

Beweis: a) und b) Definitionen.

c) \Rightarrow : 1. Schritt: Es sei A positiv definit. Gezeigt wird $\det A > 0$.

Es sei $\phi := \text{Sesq}_A$ die (nach Beispiel 12.3 iii)) zugehörige Sesquilinearform auf dem Spaltenvektorraum $M(n \times 1, \mathbb{C})$. Das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt (Satz 12.9) liefert eine Basis \mathcal{B}' , so daß $M(\mathcal{B}', \phi, \mathcal{B}')$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ ist. Sei $\mathcal{B} :=$ die Standardbasis des Spaltenvektorraums und $T := M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in GL(n, \mathbb{C})$ die Basiswechselmatrix. Wegen Satz 12.4 d) ist

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} = M(\mathcal{B}', \phi, \mathcal{B}') = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')^{tr} \cdot M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) \cdot \overline{M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} = T^{tr} \cdot A \cdot \overline{T}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} 0 &< \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n = \det T^{tr} \cdot \det A \cdot \det \overline{T} \\ &= \det T \cdot \det \overline{T} \cdot \det A = |\det T|^2 \cdot \det A, \end{aligned}$$

also $\det A > 0$.

2. Schritt: Sesq_A ist auch auf jedem Unterraum von $M(n \times 1, \mathbb{C})$ positiv definit, insbesondere auf dem Raum $\text{span}\langle e_1, \dots, e_k \rangle$. Der 1. Schritt angewandt auf diesen Unterraum zeigt $\det A_k > 0$.

\Leftarrow : Mit Induktion nach n .

Induktionsanfang, $n = 1$: klar.

Induktionsannahme: Für $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen gilt das Hauptminorenkriterium.

Induktionsschritt von $n-1$ nach n : Es seien alle Hauptminoren von A positiv. Sie umfassen alle Hauptminoren von A_{n-1} . Nach Induktionsannahme ist daher A_{n-1} positiv definit. Wie oben schließt man: Es gibt eine Matrix $T \in GL(n-1, \mathbb{C})$ mit

$$T^{tr} \cdot A_{n-1} \cdot \bar{T} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

und $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ alle > 0 . Sei

$$\tilde{T} := \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & T & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \in GL(n, \mathbb{C}).$$

Dann ist

$$\tilde{T}^{tr} \cdot A \cdot \tilde{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & & \overline{\beta_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \alpha_{n-1} & \overline{\beta_{n-1}} \\ \hline \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{array} \right)$$

mit $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $\beta_n \in \mathbb{R}$, denn $\tilde{T}^{tr} \cdot A \cdot \tilde{T}$ ist hermitesch. Die Matrix

$$S := \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \gamma_1 \\ & E_{n-1} & & \vdots \\ & & & \gamma_{n-1} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \in GL(n, \mathbb{C}) \quad \text{mit } \gamma_i = -\frac{\beta_i}{\alpha_i}$$

erfüllt

$$S^{tr} \cdot (\tilde{T}^{tr} \cdot A \cdot \tilde{T}) \cdot \bar{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mit einem $\alpha_n \in \mathbb{R}$. Wegen $\det A > 0$ ist

$$\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n = |\det S|^2 \cdot |\det \tilde{T}|^2 \cdot \det A > 0.$$

Daher ist auch $\alpha_n > 0$, und A ist positiv definit. \square

Beispiele 12.14 i) Sei $r > 1$. Die Hauptminoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r-1} & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r+1} \end{pmatrix}$$

sind $\frac{1}{r-1} > 0$ und

$$\frac{1}{r-1} \cdot \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2-1} - \frac{1}{r^2} > 0.$$

Daher ist die Matrix positiv definit.

ii) Sei $z \in \mathbb{C}$. Die Hauptminoren der hermiteschen Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{z} \\ z & 2 \end{pmatrix}$$

sind 3 und $3 \cdot 2 - z \cdot \bar{z} = 6 - |z|^2$. Die Matrix ist genau dann positiv definit, wenn $|z| < \sqrt{6}$ ist.

13 Selbstadjungierte Endomorphismen

Das Ziel in diesem Kapitel ist es, den Spektralsatz für symmetrische Matrizen (Satz 10.22 bzw. 13.8) und verwandte Sätze zu beweisen. Dazu werden Endomorphismen auf unitären und Euklidischen Vektorräumen betrachtet, zuerst simultan, später getrennt. In diesem Kapitel sind alle Vektorräume endlich-dimensional.

Satz/Definition 13.1 a) Sei V ein n -dimensionaler unitärer oder Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus von V .

(Satz) Es gibt einen eindeutigen Endomorphismus $f^* : V \rightarrow V$ mit

$$\phi(f^*(v), w) = \phi(v, f(w)) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Er erfüllt auch

$$\phi(f(v), w) = \phi(v, f^*(w)) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

(Definition) Er heißt der zu f adjungierte Endomorphismus.

b) (Definition) Die zu einer Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ adjungierte Matrix $A^* \in M(n \times n, \mathbb{C})$ ist die Matrix

$$A^* := \overline{A}^{tr} = \overline{A^{tr}}.$$

Im Spezialfall $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist die adjungierte Matrix A^* einfach die transponierte Matrix A^{tr} .

c) (Satz) Ist in der Situation von a) $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine ON-Basis von V , so ist

$$M(\mathcal{B}, f^*, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})^*.$$

In Worten: Wenn \mathcal{B} eine ON-Basis ist, ist die zum adjungierten Endomorphismus f^* gehörige Matrix die adjungierte der zum Endomorphismus f gehörigen Matrix.

Beweis: b) Definition.

a) und c) Sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine ON-Basis von V .

Behauptung: Ein Endomorphismus $g : V \rightarrow V$ erfüllt

$$\phi(g(v), w) = \phi(v, f(w)) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

genau dann, wenn

$$M(\mathcal{B}, g, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})^*$$

gilt.

Beweis: gleich. Satz 5.11 b) gab eine 1-1 Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen bei gegebenen Basen. Daraus folgt die Existenz und die Eindeutigkeit einer Abbildung g mit $M(\mathcal{B}, g, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})^*$. Nun gibt die Behauptung die Existenz und Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung f^* in a) und die Formel in c). Aus

$$\phi(f(v), w) = \overline{\phi(w, f(v))} = \overline{\phi(f^*(w), v)} = \phi(v, f^*(w))$$

folgt die zweite Gleichung in a).

Beweis der Behauptung im komplexen Fall: Weil \mathcal{B} eine ON-Basis ist, ist für

$$v = \sum_{i=1}^n x_i b_i \quad \text{und} \quad w = \sum_{i=1}^n y_i b_i \quad \text{mit} \quad x, y \in M(n \times 1, \mathbb{C})$$

$$\phi(v, w) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = x^{tr} \cdot \overline{y}.$$

Erinnerung an Satz 5.11 a):

$$\begin{array}{ccccc} & & x & \mapsto & \mathcal{B} \cdot x \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ x & M(n \times 1, \mathbb{C}) & \longrightarrow & & V \\ \downarrow & & & & \downarrow g \\ M(\mathcal{B}, g, \mathcal{B}) \cdot x & M(n \times 1, \mathbb{C}) & \longrightarrow & & V \\ & & x & \mapsto & \mathcal{B} \cdot x \end{array}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \phi(g(v), w) &= (M(\mathcal{B}, g, \mathcal{B}) \cdot x)^{tr} \cdot \overline{y} \\ &= x^{tr} \cdot \overline{M(\mathcal{B}, g, \mathcal{B}) \cdot y} \\ \text{und} \quad \phi(v, f(w)) &= x^{tr} \cdot \overline{M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) \cdot y} \\ &= x^{tr} \cdot \overline{M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})} \cdot \overline{y}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Beweis im reellen Fall: genauso. □

Definition 13.2 Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit $K = \mathbb{C}$ bzw. $K = \mathbb{R}$ heißt *unitär* bzw. *orthogonal*, falls A invertierbar ist und

$$A^* = A^{-1}, \quad \text{d.h.} \quad \overline{A}^{tr} = A^{-1} \quad \text{bzw.} \quad A^{tr} = A^{-1},$$

gilt.

Lemma 13.3 Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit $K = \mathbb{C}$ bzw. $K = \mathbb{R}$ ist genau dann unitär bzw. orthogonal, wenn die Spalten eine ON-Basis von $M(n \times 1, K)$ bezüglich des Standardskalarprodukts bilden.

Beweis: $A^* = A^{-1}$ ist äquivalent zu $A^* \cdot A = E_n$ und auch zu $A^{tr} \cdot \bar{A} = E_n$. Die letzte Gleichung ist äquivalent dazu, daß die Spalten von A eine ON -Basis von $M(n \times 1, K)$ für $K = \mathbb{R}$ bzw $K = \mathbb{C}$ bezüglich des Standardskalarprodukts bilden. \square .

Bemerkungen/Beispiele 13.4 i) Eine reelle Matrix ist natürlich genau dann orthogonal, wenn sie unitär ist. Man benutzt meistens die Bezeichnung orthogonal.

ii) Eine unitäre Matrix A erfüllt $|\det A| = 1$, eine orthogonale Matrix A hat Determinante $\det A = \pm 1$; beides gilt wegen $A^{tr} \cdot \bar{A} = E_n$, also

$$1 = \det E_n = \det A^{tr} \cdot \det \bar{A} = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2.$$

iii) Klassifikation der orthogonalen 2×2 -Matrizen:

Eine reelle 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ eine ON -Basis des $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ bilden. Es gibt ein eindeutiges $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$. Dann ist $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, also

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \pm(-\sin \alpha) \\ \sin \alpha & \pm \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Im Fall “+” ist das eine Drehmatrix, im Fall “-” ist es eine Spiegelungsmatrix. Das wird im Beispiel 14.3 genauer behandelt.

iv) Beispiele orthogonaler 3×3 -Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

v) Klassifikation der unitären 2×2 -Matrizen (Beweis Übung): Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{(\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mid \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in S^1, \\ \zeta_2 = 1 \text{ falls } \alpha = 0, \zeta_1 = 1 \text{ falls } \alpha = \frac{\pi}{2}\} \\ \rightarrow \{ \text{unitäre } 2 \times 2\text{-Matrizen} \} \\ (\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_1 \cdot \cos \alpha & -\zeta_3 \cdot \sin \alpha \\ \zeta_2 \cdot \sin \alpha & \zeta_2 \cdot \zeta_3 \cdot \bar{\zeta}_1 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

vi) Unitäre und orthogonale Matrizen und auch unitäre und orthogonale Endomorphismen werden (weiter) in Kapitel 14 behandelt.

Definition/Lemma 13.5 a) (Definition) Sei V ein n -dimensionaler unitärer oder Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ von V heißt selbstadjungiert, falls

$$f = f^*$$

gilt. Hier ist f^* der adjungierte Endomorphismus (Satz/Definition 13.1). Also ist eine Abbildung genau dann selbstadjungiert, wenn gilt:

$$\phi(v, f(w)) = \phi(f(v), w) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

(Manche Autoren benutzen die Bezeichnungen *hermitesch* im komplexen Fall und *symmetrisch* im reellen Fall).

b) (Lemma) Sei \mathcal{B} eine ON-Basis von V . Dann gilt:

f ist selbstadjungiert $\iff M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ ist hermitesch bzw. symmetrisch.

Beweis: a) Definition.

b) Das folgt aus Satz 13.1 c) und aus der Definition von hermiteschen und symmetrischen Matrizen: $\overline{A}^{tr} = A$ bzw. $A^{tr} = A$ (Definition 12.4 e) und Bemerkung 9.5 c)). \square

Bemerkungen 13.6 i) Eine $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist hermitesch, wenn die Diagonaleinträge a_{ii} reell sind und die anderen Einträge ($i \neq j$) $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ erfüllen. Daher ist die Menge aller hermiteschen $n \times n$ -Matrizen kein \mathbb{C} -Vektorraum. Aber sie ist ein \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension

$$n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Die Menge der reellen symmetrischen $n \times n$ -Matrizen ist ein \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

ii) Die nächsten beiden Sätze geben die zentralen Strukturaussagen für:

1. Selbstadjungierte Endomorphismen über \mathbb{C} (abstrakte Situation),
2. Hermitesche Matrizen (Übergang zu Matrizen),
3. Symmetrische Matrizen (Spezialisierung auf reelle Matrizen),
4. Selbstadjungierte Endomorphismen über \mathbb{R} (Übergang zur abstrakten Situation).

Die Resultate werden in dieser Reihenfolge entwickelt. Die Beweise für die Resultate über \mathbb{C} sind wegen des Fundamentalsatzes der Algebra (*komplexe Polynome zerfallen in Linearfaktoren*) etwas einfacher als die Beweise für die Resultate über \mathbb{R} .

iii) Bei hermiteschen und symmetrischen Matrizen hat man zwei natürliche und sehr verschiedene Deutungen: als Endomorphismen und als Sesquilinearformen bzw. Bilinearformen. Die Sätze 13.7 und 13.8 folgen der Deutung als Endomorphismen. Dagegen folgen Satz 13.9 und Korollar 13.11 der Deutung einer symmetrischen Matrix als symmetrische Bilinearform.

Satz 13.7 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen über \mathbb{C} und für hermitesche Matrizen).

a) (Abstrakte Version) Sei V ein n -dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gilt:

- (i) Alle Eigenwerte λ von f sind reell.
- (ii) Es gibt keine Jordanblöcke außer denen der Größe 1×1 , d.h. f ist diagonalisierbar, d.h. $\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Eig}(f, \lambda)$ für alle Eigenwerte λ .
- (iii) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h.

$$\text{Eig}(f, \lambda_1) \perp \text{Eig}(f, \lambda_2) \quad \text{für alle } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Wegen (ii) und (iii) gibt es eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f .

b) (Matrix-Version) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix. Dann gelten die Aussagen (i), (ii) und (iii) von a) genauso.

Es gibt eine ON-Basis von $M(n \times 1, \mathbb{C})$ bezüglich des Standardskalarproduktes, die aus Eigenvektoren von A besteht. Ist T eine Matrix, deren Spalten eine solche ON-Basis bilden, so ist T unitär, und es ist

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

hier sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A .

Beweis: a) (i) Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra zerfällt das charakteristische Polynom von f in Linearfaktoren. Die Nullstellen sind die Eigenwerte von f . Sei $v \in V - \{0\}$ ein Eigenvektor von f mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist $\phi(v, v) > 0$ und

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \phi(v, v) &= \phi(\lambda \cdot v, v) = \phi(f(v), v) \\ &= \phi(v, f^*(v)) = \phi(v, f(v)) \\ &= \phi(v, \lambda \cdot v) = \bar{\lambda} \cdot \phi(v, v). \end{aligned}$$

Wegen $\phi(v, v) > 0$ ist λ reell.

(ii) Mit Induktion über die Dimension n von V .

Induktionsanfang, $n = 1$: trivial.

Induktionsannahme: Für einen selbstadjungierten Endomorphismus eines unitären Vektorraums der Dimension $\leq n - 1$ gilt (ii).

Induktionsschritt: Sei wieder $v \in V - \{0\}$ ein Eigenvektor von f mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ (wegen (i) ist $\lambda \in \mathbb{R}$, aber das ist im Moment unwichtig.) Sei $W :=$

$(\mathbb{C} \cdot v)^\perp$. Dann ist $V = \mathbb{C} \cdot v \oplus W$ wegen Lemma 12.6 e), und W ist mit der Einschränkung von ϕ ein unitärer Vektorraum der Dimension $n - 1$. Für $w \in W$ gilt

$$\phi(v, f(w)) = \phi(f(v), w) = \lambda \cdot \phi(v, w) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Also ist

$$f(W) \subset W.$$

Daher ist $f|_W$ ein selbstadjungierter Endomorphismus von W . Nach Induktionsannahme zerfällt W in Eigenräume von f . Wegen $V = \mathbb{C} \cdot v \oplus W$ zerfällt auch V in Eigenräume von f .

(iii) Satz 8.18 gibt eine direkte Summe $V = \bigoplus_{\lambda \text{ Eigenwert}} \text{Eig}(f, \lambda)$. Sind v_1 und v_2 zwei Eigenvektoren mit verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2 , so ist

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(f(v_1), v_2) - \phi(v_1, f(v_2)) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \phi(v_1, v_2) \quad (\text{die Eigenwerte sind reell}), \end{aligned}$$

also $\phi(v_1, v_2) = 0$. Daher kann man die direkte Summe oben eine *orthogonale direkte Summe* nennen.

ON-Basen der einzelnen Eigenräume $\text{Eig}(f, \lambda)$ geben zusammen eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f .

b) Der Endomorphismus

$$l_A : M(n \times 1, \mathbb{C}) \rightarrow M(n \times 1, \mathbb{C}), \quad b \mapsto A \cdot b$$

ist nach Lemma 13.5 b) selbstadjungiert, denn $A = M(\mathcal{B}, l_A, \mathcal{B})$ mit $\mathcal{B} :=$ Standardbasis des $M(n \times 1, \mathbb{C})$. Man wendet a) auf $f := l_A$ und $V := M(n \times 1, \mathbb{C})$ mit dem Standardskalarprodukt an.

Die Matrix T ist nach Lemma 13.3 unitär. Weil sie aus Eigenvektoren von A besteht, ist $T^{-1} \cdot A \cdot T$ diagonal mit den Eigenwerten von A in der Diagonalen.

□

Satz 13.8 (*Spektralsatz für symmetrische Matrizen und selbstadjungierte Endomorphismen über \mathbb{R}*)

a) (*Matrix-Version*) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch.

Seine Eigenwerte sind reell. Die Matrix A ist diagonalisierbar. Die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Daher (und wegen Satz 8.18) gibt es eine ON-Basis von $M(n \times 1, \mathbb{R})$ bezüglich des Standardskalarproduktes, die aus Eigenvektoren von A besteht. Ist T eine Matrix, deren Spalten eine solche ON-Basis bilden, so ist T orthogonal, und es ist

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

hier sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A .

b) (Abstrakte Version) Sei V ein n -dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Dann gilt:

(i) Alle Eigenwerte λ von f sind reell.

(ii) Es gibt keine Jordanblöcke außer denen der Größe 1×1 , d.h. f ist diagonalisierbar, d.h. $\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Eig}(f, \lambda)$ für alle Eigenwerte λ .

(iii) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h.

$$\text{Eig}(f, \lambda_1) \perp \text{Eig}(f, \lambda_2) \quad \text{für alle } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Wegen (ii) und (iii) gibt es eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f .

Beweis: a) Eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist, als komplexe Matrix aufgefaßt, hermitesch. Daher gilt Satz 13.7 b) für sie. Insbesondere sind alle Eigenwerte reell. Das charakteristische Polynom $p_A(t)$ zerfällt in $\mathbb{R}[t]$ in Linearfaktoren. Daher ist

$$\begin{aligned} M(n \times 1, \mathbb{R}) &= \bigoplus_{\lambda \text{ Eigenwert}} \text{Hau}_{\mathbb{R}}(A, \lambda) && \text{(Satz 8.18)} \\ &= \bigoplus_{\lambda \text{ Eigenwert}} \text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \lambda) \end{aligned}$$

(A hat nur Jordanblöcke der Größe 1).

Also ist A diagonalisierbar. Weil die Einschränkung des Standardskalarproduktes von $M(n \times 1, \mathbb{C})$ auf $M(n \times 1, \mathbb{R})$ dessen Standardskalarprodukt ist, sind verschiedene Eigenräume orthogonal.

Die Matrix T ist nach Lemma 13.3 orthogonal. Weil sie aus Eigenvektoren von A besteht, ist $T^{-1} \cdot A \cdot T$ diagonal mit den Eigenwerten von A in der Diagonalen.

b) Man wählt irgendeine ON-Basis \mathcal{A} des Euklidischen Vektorraums V . Die Matrix $A := M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A})$ ist symmetrisch nach Lemma 13.5 b). Man wendet Teil a) an und erhält eine orthogonale Matrix T mit

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Man definiert die neue Basis $\mathcal{B} := \mathcal{A} \cdot T$; es ist $M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = T$ die Basiswechsellmatrix. Weil T orthogonal ist, ist auch \mathcal{B} eine ON-Basis:

$$M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) = T^{tr} \cdot M(\mathcal{A}, \phi, \mathcal{A}) \cdot T = T^{tr} \cdot E_n \cdot T = T^{tr} \cdot T = E_n.$$

Und es ist

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = T^{-1} \cdot A \cdot T.$$

Also ist \mathcal{B} eine *ON*-Basis aus Eigenvektoren von A mit reellen Eigenwerten.
□

Satz/Definition 13.9 (*Satz von Sylvester, = Satz 10.23*)

a) (*Abstrakte Version*) Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $\phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei

$$\begin{aligned} r_+ &:= \max(\dim U \mid U \text{ ist ein Untervektorraum von } V, \\ &\quad \text{auf dem } \phi \text{ positiv definit ist,} \\ r_0 &:= \dim \text{Rad}(\phi), \\ r_- &:= \max(\dim U \mid U \text{ ist ein Untervektorraum von } V, \\ &\quad \text{auf dem } \phi \text{ negativ definit ist.} \end{aligned}$$

Es gibt Unterräume $U_1, U_2 \subset V$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} V &= U_1 \oplus \text{Rad}(\phi) \oplus U_2, \\ U_1 &\perp U_2 \text{ (d.h. } u_1 \perp u_2 \text{ für alle } u_1 \in U_1, u_2 \in U_2), \\ \phi &\text{ ist positiv definit auf } U_1 \text{ und negativ definit auf } U_2. \end{aligned}$$

(Bei $r_+ = n$ ist $U_1 = V$, bei $r_+ = 0$ ist $U_1 = \{0\}$, sonst ist U_1 nicht eindeutig; analoges gilt für r_- und U_2 .) Es gilt immer:

$$\dim U_1 = r_+, \quad \dim U_2 = r_-.$$

Das Tripel (r_+, r_0, r_-) heißt **Signatur** von ϕ .

b) (*Matrix-Version*) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A . Jedes $T \in GL(n, \mathbb{R})$ mit

$$T^{\text{tr}} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ erfüllt

$$\begin{aligned} (\text{die Anzahl der positiven } \alpha_i) &= (\text{die Anzahl der positiven } \lambda_i) =: r_+, \\ (\text{die Anzahl der } \alpha_i = 0) &= (\text{die Anzahl der } \lambda_i = 0) =: r_0, \\ (\text{die Anzahl der negativen } \alpha_i) &= (\text{die Anzahl der negativen } \lambda_i) =: r_-. \end{aligned}$$

Das Tripel (r_+, r_0, r_-) heißt **Signatur** von A . Die Zahlen erfüllen auch

$$r_+ + r_0 + r_- = n \quad \text{und} \quad r_0 = n - \text{rang } A.$$

Beweis: a) **1. Schritt:** Es gibt Unterräume $U_1, U_2 \subset V$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} V &= U_1 \oplus \text{Rad}(\phi) \oplus U_2, \\ U_1 &\perp U_2 \text{ (d.h. } u_1 \perp u_2 \text{ für alle } u_1 \in U_1, u_2 \in U_2), \\ \phi &\text{ ist positiv definit auf } U_1 \text{ und negativ definit auf } U_2. \end{aligned}$$

Beweis: Man wählt irgendeine Basis \mathcal{B} von V . Die Matrix $M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B})$ ist reell und symmetrisch. Man wendet Satz 13.8 a) an und erhält eine orthogonale Matrix T , so daß $T^{tr} \cdot M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) \cdot T$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ von $M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B})$ in der Diagonalen ist. Man erhält die neue Basis $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n) = \mathcal{B} \cdot T$. Dann ist

$$M(\mathcal{C}, \phi, \mathcal{C}) = T^{tr} \cdot M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} U_1 &:= \text{span}\langle c_i \mid \phi(c_i, c_i) > 0 \rangle, \\ U_2 &:= \text{span}\langle c_i \mid \phi(c_i, c_i) < 0 \rangle, \\ \text{Rad}(\phi) &= \text{span}\langle c_i \mid \phi(c_i, c_i) = 0 \rangle \end{aligned}$$

eine Zerlegung $V = U_1 \oplus \text{Rad}(\phi) \oplus U_2$ mit $U_1 \perp U_2$ und ϕ positiv definit auf U_1 , negativ definit auf U_2 . (\square)

Wir fixieren eine solche Zerlegung $V = U_1 \oplus \text{Rad}(\phi) \oplus U_2$.

2. Schritt: Ist $U'_1 \subset V$ irgendein Unterraum, auf dem ϕ positiv definit ist, so ist

$$U'_1 \cap (\text{Rad}(\phi) \oplus U_2) = \{0\}$$

und

$$\dim U'_1 \leq \dim U_1.$$

Analog für U'_2 , auf dem ϕ negativ definit ist.

Beweis: Annahme: $v \in U'_1 \cap (\text{Rad}(\phi) \oplus U_2)$ und $v \neq 0$.

Dann ist $\phi(v, v) > 0$ wegen $v \in U'_1$ und $\phi(v, v) \leq 0$ wegen $v \in \text{Rad}(\phi) \oplus U_2$. Widerspruch. Also ist $U'_1 \cap (\text{Rad}(\phi) \oplus U_2) = \{0\}$ und $U'_1 \oplus \text{Rad}(\phi) \oplus U_2 \subset V$ und

$$\begin{aligned} &\dim U'_1 + \dim \text{Rad}(\phi) + \dim U_2 \\ &\leq \dim V = \dim U_1 + \dim \text{Rad}(\phi) + \dim U_2, \end{aligned}$$

also $\dim U'_1 \leq \dim U_1$. (\square)

3. Schritt: Aus dem 2. Schritt folgt

$$r_+ = \dim U_1 \quad \text{und} \quad r_- = \dim U_2.$$

Nun folgt auch $r_+ + r_0 + r_- = n$. (□)

b) Satz 13.8 a) liefert eine spezielle, nämlich eine orthogonale Matrix T , für die gilt

$$T^{tr} \cdot A \cdot T = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Das erfüllt natürlich den Satz. Daher ist “bloß” zu zeigen, daß bei einem beliebigen $T \in GL(n, \mathbb{C})$ die Anzahl der α_i , die positiv/= 0/negativ sind, unabhängig von T ist. Das wird mit Hilfe von a) gemacht.

Sei V irgendein K -Vektorraum der Dimension n und \mathcal{B} irgendeine Basis von V . Die Bilinearform $\phi := \text{Bil}_{A, \mathcal{B}, \mathcal{B}}$ (Satz/Definition 9.3 a)) ist symmetrisch und erfüllt $M(\mathcal{B}, \phi, \mathcal{B}) = A$.

Mit T geht man zu einer Basis \mathcal{C} mit Basiswechselmatrix $T = M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ über. Die Matrix $M(\mathcal{C}, \phi, \mathcal{C}) = T^{tr} \cdot A \cdot T$ ist eine Diagonalmatrix. Wir betrachten die Zerlegung $V = U_1 \oplus \text{Rad}(\phi) \oplus U_2$ vom 1. Schritt in b).

Offenbar ist

$$\begin{aligned} \dim U_1, &= (\text{die Anzahl der positiven } \alpha_i), \\ \dim \text{Rad}(\phi) &= (\text{die Anzahl der } \alpha_i = 0), \\ \dim U_2 &= (\text{die Anzahl der negativen } \alpha_i). \end{aligned}$$

Das Tripel $(\dim U_1, \dim \text{Rad}(\phi), \dim U_2)$ ist zugleich die Signatur von ϕ und daher nach a) unabhängig von der Wahl von T . □

Bemerkungen 13.10 (i) Es gibt auch einen Satz von Sylvester für hermitesche Sesquilinearformen und hermitesche Matrizen. Er lautet fast genauso wie Satz 13.9.

(ii) Das nächste Korollar ist bloß eine Uminterpretation des Spektralsatzes 13.8, wenn man symmetrische Matrizen nicht mit selbstadjungierten Endomorphismen, sondern mit symmetrischen Bilinearformen verknüpft.

(iii) Die Bezeichnung *Hauptachsentransformation* wird in den Beispielen 13.13 erläutert. Mit Hilfe der quadratischen Form (Definition 13.12) einer symmetrischen Bilinearform (bzw. symmetrischen Matrix) wird die Geometrie hinter der Hauptachsentransformation beleuchtet.

Korollar 13.11 (zu Satz 13.8, Hauptachsentransformation)

a) (Matrix-Version) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch.

Es gibt eine orthogonale Matrix T mit

$$T^{\text{tr}} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hier sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A .

b) (Abstrakte Version) Sei V ein n -dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweite symmetrische Bilinearform.

Dann gibt es eine ON-Basis \mathcal{B} von V bezüglich ϕ , so daß

$$M(\mathcal{B}, \psi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis: a) Das folgt sofort aus Satz 13.8 a). Denn daß die Matrix T dort orthogonal ist, sagt gerade $T^{-1} = T^{\text{tr}}$.

b) Man wählt irgendeine ON-Basis \mathcal{A} von V . Die Matrix $A := M(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A})$ ist symmetrisch. Nach Teil a) gibt es eine orthogonale Matrix T mit

$$T^{\text{tr}} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix};$$

hier sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A .

Weil T orthogonal ist, ist auch die Basis $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cdot T$ eine ON-Basis von V bezüglich ϕ . Die Matrix T ist die Basiswechsellmatrix $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Es ist nach Satz 9.3 d)

$$M(\mathcal{B}, \psi, \mathcal{B}) = M(\mathcal{A}, \mathcal{B})^{\text{tr}} \cdot M(\mathcal{A}, \psi, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = T^{\text{tr}} \cdot A \cdot T.$$

□

Definition/Lemma 13.12 (Quadratische Form) Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$, und sei V ein K -Vektorraum.

a) (Definition) Sei $\phi : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform. Ihre quadratische Form $q_\phi : V \rightarrow K$ ist definiert durch

$$q_\phi(v) := \phi(v, v).$$

b) (Lemma) (Polarisierung) Man erhält eine symmetrische Bilinearform $\phi : V \times V \rightarrow K$ aus ihrer quadratischen Form q_ϕ mit der Formel zurück:

$$\phi(v, w) = \frac{1}{2}(q_\phi(v + w) - q_\phi(v) - q_\phi(w)).$$

Beweis: a) Definition.

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(q_\phi(v+w) - q_\phi(v) - q_\phi(w)) &= \frac{1}{2}(\phi(v+w, v+w) - \phi(v, v) - \phi(w, w)) \\ &= \frac{1}{2}(\phi(v, w) + \phi(w, v)) = \phi(v, w). \end{aligned}$$

□

Beispiele 13.13 (i) Eine symmetrische Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert eine symmetrische Bilinearform Bil_A auf $M(n \times 1, \mathbb{R})$ und daher auch eine quadratische Form $q_A := q_{\text{Bil}_A} : M(n \times 1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Im Fall $n = 2$ und $A = (a_{ij})$ ist

$$q_A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2.$$

(ii) Nach Korollar 13.11 existiert eine orthogonale Matrix $T \in GL(2, \mathbb{R})$, so daß

$$T^{tr} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ist. Dann sind die Spalten von T eine ON -Basis von $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ und Eigenvektoren von A . Es sind (y_1, y_2) mit

$$T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

die Koordinaten auf $M(2 \times 1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$ zu dieser ON -Basis.

SKIZZE IN DER VORLESUNG

Bezüglich dieser Koordinaten nimmt die quadratische Form die einfache Gestalt

$$q_A = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

an, denn

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot T^{tr} \cdot A \cdot T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Nun ist es interessant, die Niveaulinie $q_A^{-1}(1) = \{(x_1, x_2) \mid q_A(x_1, x_2) = 1\}$ zu studieren.

Im Fall $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ist sie eine Ellipse.

SKIZZE IN DER VORLESUNG

Im Fall $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ist sie eine Verallgemeinerung der klassischen Hyperbel.

SKIZZE IN DER VORLESUNG

Die (bei $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 1-dimensionalen) Eigenräume von A sind gerade die Symmetrieachsen, die *Hauptachsen* der Ellipse und der Hyperbel.

Die Hauptachsentransformation (Korollar 13.11) ist der Koordinatenwechsel zu Koordinaten, die diesen Hauptachsen = Eigenräumen angepaßt sind. Daß die Hauptachsen orthogonal zueinander sind, ist ein wesentlicher und schöner Teil der Geometrie hier.

(iv) Der Satz von Sylvester (13.9 und 10.20) wird oft *Trägheitssatz von Sylvester* genannt, weil er wegen Korollar 13.11 die Vorzeichen der Eigenwerte einer symmetrischen Matrix betrifft und weil die zugehörigen Eigenräume nicht nur *Hauptachsen*, sondern auch *Trägheitsachsen* genannt werden.

Dieser letzte Name ist durch physikalische Betrachtungen zu rotierenden Körpern motiviert: Dort hat man eine positiv definite symmetrische 3×3 -Matrix, deren Eigenräume die Trägheitsachsen eines gegebenen Körpers sind.

EVTL. SKIZZE ZUM ELLIPSOID IN DER VORLESUNG

14 Orthogonale und unitäre Automorphismen

In diesem Kapitel werden Automorphismen von endlich-dimensionalen unitären und Euklidischen Vektorräumen betrachtet. Bei Euklidischen Vektorräumen sind das einfach die Automorphismen, die Längen und Winkel erhalten. Besonders anschaulich ist das in den Fällen von zwei- und dreidimensionalen Vektorräumen.

Definition 14.1 Sei V ein n -dimensionaler unitärer bzw. Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ . Ein Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ heißt *unitär* bzw. *orthogonal*, falls

$$\phi(v, w) = \phi(f(v), f(w)) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

ist.

Lemma 14.2 a) Sei V ein n -dimensionaler unitärer bzw. Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(α) f ist unitär bzw. orthogonal,

(β) f ist invertierbar, und es gilt:

$$f^* = f^{-1}.$$

(γ) Ist \mathcal{B} eine ON-Basis, so ist die Matrix $M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})$ unitär bzw. orthogonal.

b) Seien V, ϕ, f wie in a), und (α) – (γ) sollen gelten. Dann erhält f das Skalarprodukt, die Norm und die Metrik auf V , also auch die Längen von Vektoren. Im reellen Fall erhält f auch die Winkel.

c) Im Fall $V = M(n \times 1, K)$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $A \in M(n \times n, K)$ gilt:

A ist unitär bzw. orthogonal $\iff l_A : V \rightarrow V$ ist unitär bzw. orthogonal.

Beweis: a) (α) \iff (β): Wenn (α) gilt, ist wegen $\|f(v)\| = \|v\|$ für $v \in V$ der Endomorphismus f injektiv. Weil V endlich-dimensional ist, ist f auch surjektiv, also invertierbar. Daher ist f stets invertierbar, egal ob man mit (α) oder (β) startet. Nun folgt die Äquivalenz (α) \iff (β) aus

$$\phi(f(v), f(w)) = \phi(f^*(f(v)), w)$$

und aus Definition 14.1.

(β) \iff (γ): Das folgt aus Satz 13.1 c) und aus $M(\mathcal{B}, f^{-1}, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B})^{-1}$ (Satz 5.11 d)).

b) Klar. c) Das folgt aus a) (α) \iff (γ). □.

Beispiel 14.3 (Der Fall 2×2 bzw. $\dim V = 2$)

Eine unitäre Matrix A erfüllt nach 13.4 ii) $\det A \in S^1$, und eine orthogonale Matrix A erfüllt $\det A \in \{\pm 1\}$.

Die orthogonalen 2×2 -Matrizen waren in 13.4 iii) klassifiziert:

$$\{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal, } \det A = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Die orthogonale Abbildung l_A auf $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ ist eine Drehung um den Winkel α . Sie erhält die Orientierung (das paßt zu $\det A = 1$).

SKIZZE IN DER VORLESUNG

$$\{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal, } \det A = -1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Behauptung: Diese Matrix hat die Eigenwerte $+1$ und -1 und die (orthogonalen) Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$. Sie ist daher eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$. Sie ist orientierungsumkehrend (das paßt zu $\det A = -1$).

SKIZZE IN DER VORLESUNG

1. Beweis: Durch Nachrechnen,

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ \text{(Additionstheorem von } e^{i\alpha} \cdot e^{-i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}}),$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \\ -\sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Beweis: Mit geometrischen Argumenten und mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Interpretation dieser Gleichung: Man führt zuerst eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus, danach eine Drehung um den Winkel α . Die Komposition

ist eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$.

Begründung: Die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bildet den Vektor $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ auf den Vektor $\begin{pmatrix} \cos \frac{-\alpha}{2} \\ \sin \frac{-\alpha}{2} \end{pmatrix}$ ab, die Drehung bildet diesen Vektor

wieder auf den Vektor $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ ab. Also ist $\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

SKIZZE IN DER VORLESUNG

Weil l_A Winkel erhält, muß der orthogonale Vektor $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ wieder auf einen orthogonalen Vektor abgebildet werden, also notwendigerweise auf ± 1 mal sich selber. Wegen $\det A = -1$ ist der zweite Eigenwert -1 , also wird der Vektor $\begin{pmatrix} -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ auf -1 mal sich selber abgebildet \square

Man kann diese Klassifikation von orthogonalen 2×2 -Matrizen auf orthogonale Automorphismen eines zweidimensionalen Euklidischen Vektorraums übertragen: Es gibt da nur Drehungen und Spiegelungen, die orthogonalen Automorphismen mit $\det = +1$ sind Drehungen, die orthogonalen Automorphismen mit $\det = -1$ sind Spiegelungen.

Lemma 14.4 (Der Fall $\dim V = 3$ bzw. 3×3)

Sei V ein dreidimensionaler Euklidischer Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ ein orthogonaler Automorphismus. Es ist $\det f = \pm 1$.

1. Fall, $\det f = +1$: Dann ist f eine Drehung um einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ an einer orientierten Drehachse $\mathbb{R} \cdot b_1$ mit $\|b_1\| = 1$. Ist (b_2, b_3) eine ON-Basis von $(\mathbb{R} \cdot b_1)^\perp$, so ist $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine ON-Basis von V und

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

SKIZZE IN DER VORLESUNG (MIT DER "RECHTE-HAND-REGEL")

Insbesondere ist b_1 ein Eigenvektor von f mit Eigenwert 1. Im Fall $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ kann man dieselbe Drehung als Drehung um den Winkel $2\pi - \alpha \in (0, \pi]$ an der orientierten Drehachse $\mathbb{R}^+ \cdot (-b_1)$ deuten.

2. Fall, $\det f = -1$: Dann ist f eine Drehspiegelung, d.h. eine Komposition einer Drehung δ um einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ an einer Drehachse $\mathbb{R}^+ \cdot b_1$ mit $\|b_1\| = 1$ und einer Spiegelung σ an der Ebene $(\mathbb{R} \cdot b_1)^\perp$. Dabei ist die Reihenfolge von Drehung und Spiegelung egal, denn sie kommutieren,

$$f = \delta \circ \sigma = \sigma \circ \delta.$$

Insbesondere ist

$$\text{Eig}(\delta, 1) \supset \mathbb{R} \cdot b_1, \quad \text{Eig}(\sigma, 1) = (\mathbb{R} \cdot b_1)^\perp, \quad \text{Eig}(\sigma, -1) = \mathbb{R} \cdot b_1.$$

SKIZZE IN DER VORLESUNG

Hier wird der Fall $\alpha = 0$ nicht ausgeschlossen. In dem Fall ist $\delta = \text{id}$, und $f = \sigma$ ist einfach eine Spiegelung.

Ist (b_2, b_3) eine ON-Basis von $(\mathbb{R} \cdot b_1)^\perp$, so ist $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine ON-Basis von V und

$$\begin{aligned} M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ M(\mathcal{B}, \delta, \mathcal{B}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \\ M(\mathcal{B}, \sigma, \mathcal{B}) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beweis: Es ist $\det f = \pm 1$ wegen 13.4 ii). Das charakteristische Polynom $p_f(t)$ hat wegen $p_f(t) \in \mathbb{R}[t]$ und wegen $\deg p_f(t) = 3$ entweder eine reelle und zwei konjugiert komplexe Nullstellen oder drei reelle Nullstellen. Jede reelle Nullstelle λ erfüllt $\lambda = \pm 1$, denn wenn $v \in V - \{0\}$ ein Eigenvektor mit Eigenwert λ ist, gilt

$$0 < \|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|, \quad \text{also } |\lambda| = 1.$$

Behauptung: $\det f \in \{\pm 1\}$ ist selber eine Nullstelle von $p_f(t)$ und damit ein Eigenwert von f .

Beweis: Die drei komplexen Nullstellen von $p_f(t)$ werden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ genannt. Sie erfüllen $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \det f$. Wenn alle drei reell sind, sind alle drei ± 1 . Dann können nicht alle drei gleich $-\det f$ sein; mindestens eine ist gleich $\det f$. Wenn zwei konjugiert komplex sind, etwa λ_2 und λ_3 , dann ist λ_1 reell und hat das gleiche Vorzeichen wie $\det f$; dann ist $\lambda_1 = \det f$. (\square)

Sei nun $b_1 \in V$ mit $\|b_1\| = 1$ ein Eigenvektor von f mit Eigenwert $\det f$, und sei $W := (\mathbb{R} \cdot b_1)^\perp$. Für $w \in W$ gilt

$$\det f \cdot \phi(b_1, f(w)) = \phi(f(b_1), f(w)) = \phi(b_1, w) = 0,$$

also $\phi(b_1, f(w)) = 0$, also $f(W) \subset W$. Daher ist $f|_W$ ein orthogonaler Automorphismus von W . Wegen

$$\det f = \det(f|_{\mathbb{R} \cdot b_1}) \cdot \det(f|_W) \quad \text{und} \quad f(b_1) = \det f \cdot b_1$$

ist $\det(f|_W) = 1$. Daher und wegen Beispiel 14.3 ist $f|_W$ eine Drehung von W um einen Winkel α . Ist (b_2, b_3) eine ON-Basis von W , so ist $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine ON-Basis von V und

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \det f & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Alle weiteren Aussagen in den beiden Fällen $\det f = 1$ und $\det f = -1$ sind nun auch ziemlich klar. \square

Bemerkungen 14.5 i) Lemma 14.4 und Beispiel 14.3 sind Spezialfälle von Satz 14.7. Daß sie getrennt und vorher behandelt werden, ist redundant. Aber weil sie so wichtig und schön sind, sollen die Argumente ihrer Beweise nicht in den (langen) Beweisen der allgemeinen Sätze 14.6 und 14.7 begraben werden, sondern für sich herausgestellt werden.

ii) Die Sätze 14.6 und 14.7 geben die zentralen Strukturaussagen für:

1. Unitäre Endomorphismen (d.h. über \mathbb{C} , abstrakte Situation),
2. Unitäre Matrizen (über \mathbb{C} , Übergang zu Matrizen),
3. Orthogonale Matrizen (über \mathbb{R} , Spezialisierung auf reelle Matrizen),
4. Orthogonale Endomorphismen (über \mathbb{R} , Übergang zur abstrakten Situation).

Die Resultate werden in dieser Reihenfolge entwickelt. Die Resultate über \mathbb{C} sind wegen des Hauptsatzes der Algebra (*komplexe Polynome zerfallen in Linearfaktoren*) einfacher als die über \mathbb{R} . Ein Teil der Argumente ist sehr ähnlich zu denen in den Beweisen der Spektralsätze in Kapitel 13.

Satz 14.6 (*Spektralsatz für unitäre Endomorphismen und Matrizen*)

a) (*Abstrakte Version*) Sei V ein n -dimensionaler unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus. Dann gilt:

- (i) Alle Eigenwerte λ von f erfüllen $|\lambda| = 1$.
- (ii) Es gibt keine Jordanblöcke außer denen der Größe 1×1 , d.h. f ist diagonalisierbar, d.h. $\text{Hau}(f, \lambda) = \text{Eig}(f, \lambda)$ für alle Eigenwerte λ .
- (iii) Verschiedene Eigenräume sind orthogonal, d.h.

$$\text{Eig}(f, \lambda_1) \perp \text{Eig}(f, \lambda_2) \quad \text{für alle } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Wegen (ii) und (iii) gibt es eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f .

b) (*Matrix-Version*) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine unitäre Matrix. Dann gelten die Aussagen (i), (ii) und (iii) von a) genauso. Es gibt eine ON-Basis von $M(n \times 1, \mathbb{C})$ bezüglich des Standardskalarproduktes aus Eigenvektoren von A . Ist

$$T := M(\text{Standardbasis}, \text{ON-Basis aus Eigenvektoren})$$

die Basiswechselmatrix, so ist

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hier ist $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$ und natürlich $k + l + 2m = n$. Die Winkel α_i sind in $[0, 2\pi) - \{0, \pi\}$.

b) (Abstrakte Version) Sei V ein n -dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt ϕ , und sei $f : V \rightarrow V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann läßt sich V als direkte Summe

$$V = \text{Eig}(f, 1) \oplus \text{Eig}(f, -1) \oplus \bigoplus_{i=1}^m B_i$$

von Unterräumen mit den folgenden Eigenschaften schreiben:

(i) Die Unterräume sind orthogonal zueinander.

(ii) Die Unterräume sind f -invariant (das ist klar bei $\text{Eig}(f, 1)$ und $\text{Eig}(f, -1)$).

(iii) Die Unterräume B_i sind zweidimensional, und $f|_{B_i} : B_i \rightarrow B_i$ ist eine Drehung um einen Winkel $\alpha_i \in [0, 2\pi) - \{0, \pi\}$.

(Es kann $\text{Eig}(f, 1) = \{0\}$ oder $\text{Eig}(f, -1) = \{0\}$ oder $m = 0$ sein.)

Beweis: a) Im Verlauf des Beweises werden Spaltenvektoren $b_1, \dots, b_n \in M(n \times 1, \mathbb{R})$ gewählt, die zusammen eine Matrix T mit den gewünschten Eigenschaften geben.

0. Schritt:

Die orthogonale Matrix $A \in GL(n, \mathbb{R})$ ist, aufgefaßt als komplexe Matrix, unitär. Daher gilt Satz 14.6 b) für sie.

Man muß nun sorgfältig zwischen Eigenvektoren von A in $M(n \times 1, \mathbb{C})$ und Eigenvektoren von A in $M(n \times 1, \mathbb{R})$ unterscheiden. Die Eigenwerte 1 und -1 sind reell. Daher gilt

$$v \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \pm 1) \iff \Re(v) \text{ und } \Im(v) \in \text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \pm 1) \\ \text{und } \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \pm 1) = \mathbb{C} \cdot \text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \pm 1).$$

Daher ist eine ON -Basis von $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, \pm 1) \subset M(n \times 1, \mathbb{R})$ als Euklidischer Vektorraum auch eine ON -Basis von $\text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \pm 1) \subset M(n \times 1, \mathbb{C})$ als unitärer Vektorraum.

1. Schritt: Es wird eine ON -Basis b_1, \dots, b_k von $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, 1)$ gewählt, und ebenso eine ON -Basis b_{k+1}, \dots, b_{k+l} von $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(A, -1)$ (evtl. ist $k = 0$ oder $l = 0$).

Falls $k + l = n$ ist, ist man schon fertig. Im anderen Fall werden die restlichen Spaltenvektoren b_{k+l+1}, \dots, b_n paarweise induktiv konstruiert.

2. Schritt: Zuerst wählt man einen Eigenvektor $v_1 \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda_1)$ für ein $\lambda_1 \neq 1, -1$ mit $\|v_1\| = 1$.

Wegen $A \cdot v_1 = \lambda_1 \cdot v_1$ und $A = \bar{A}$ ist

$$A \cdot \bar{v}_1 = \overline{A \cdot v_1} = \overline{\lambda_1 \cdot v_1} = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{v}_1.$$

Wegen $\lambda_1 \neq 1, -1$ ist $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1$. Daher sind nach Satz 14.6 b) v_1 und \bar{v}_1 orthogonal und linear unabhängig voneinander und von allen b_1, \dots, b_{k+l} . Man definiert

$$\begin{aligned} b_{k+l+1} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + \bar{v}_1), \\ b_{k+l+2} &:= \frac{i}{\sqrt{2}}(v_1 - \bar{v}_1). \end{aligned}$$

Auch b_{k+l+1} und b_{k+l+2} sind linear unabhängig voneinander und von allen b_1, \dots, b_{k+l} . Wegen

$$\begin{aligned} \overline{b_{k+l+1}} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{v}_1 + v_1) = b_{k+l+1}, \\ \overline{b_{k+l+2}} &:= \frac{-i}{\sqrt{2}}(\bar{v}_1 - v_1) = b_{k+l+2} \end{aligned}$$

sind sie Spaltenvektoren mit reellen Einträgen, $b_{k+l+1}, b_{k+l+2} \in M(n \times 1, \mathbb{R})$. Wegen $\text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda_1) \perp \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \bar{\lambda}_1)$ sind v_1 und \bar{v}_1 eine *ON*-Basis des von ihnen erzeugten (komplexen) Vektorraum; also ist

$$\bar{v}_1^{tr} \cdot v_1 = v_1^{tr} \cdot \bar{v}_1 = 1, \quad v_1^{tr} \cdot v_1 = \bar{v}_1^{tr} \cdot \bar{v}_1 = 0.$$

Damit rechnet man leicht aus

$$b_{k+l+i}^{tr} \cdot b_{k+l+j} = \delta_{ij} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq 2.$$

Daher ist $(b_1, \dots, b_{k+l}, b_{k+l+1}, b_{k+l+2})$ eine *ON*-Basis des von ihnen erzeugten (reellen oder komplexen) Vektorraums.

Es ist $\lambda_1 = \cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1$ für ein $\alpha_1 \in [0, 2\pi) - \{0, \pi\}$. Man rechnet aus

$$\begin{aligned} (A \cdot b_{k+l+1}, A \cdot b_{k+l+2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\lambda_1 \cdot v_1 + \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{v}_1, i\lambda_1 \cdot v_1 - i\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{v}_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\cos \alpha_1 \cdot (v_1 + \bar{v}_1) + \sin \alpha_1 \cdot (iv_1 - i\bar{v}_1), \\ &\quad \sin \alpha_1(-v_1 - \bar{v}_1) + \cos \alpha_1(iv_1 - i\bar{v}_1)) \\ &= (b_{k+l+1}, b_{k+l+2}) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Schritt: Wenn nun $k+l+2 < n$ ist, wiederholt man den 2. Schritt mit einem Eigenvektor $v_2 \in \text{Eig}_{\mathbb{C}}(A, \lambda_2)$, der normiert ist und im Raum

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k+l+2} \mathbb{C} \cdot v_i \right)^\perp = \left(\bigoplus_{i=1}^{k+l+2} \mathbb{C} \cdot b_i \right)^\perp$$

liegt. Einen solchen Eigenvektor gibt es. Denn dieser Raum ist l_A -invariant; das folgt wie im Beweis von Satz 14.6 a) für den Raum W dort. Es ist $\lambda_2 \neq 1, -1$ (aber möglicherweise ist $\lambda_2 = \lambda_1$; das stört nicht).

Weitere Schritte: man fährt so lange fort, wie es geht. Am Ende hat man eine *ON*-Basis b_1, \dots, b_n von $M(n \times 1, \mathbb{R})$. Nach Lemma 14.4 b) ist die Matrix T mit den Spalten b_1, \dots, b_n orthogonal. Nach Konstruktion ist $T^{-1} \cdot A \cdot T$ wie gewünscht.

b) Man wählt irgendeine *ON*-Basis \mathcal{A} des Euklidischen Vektorraums V . Die Matrix $A := M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A})$ ist orthogonal nach Lemma 14.4 a). Man wendet Teil a) an und erhält eine orthogonale Matrix T mit $T^{-1} \cdot A \cdot T$ wie in a). Weil T orthogonal ist, ist auch die Basis $(b_1, \dots, b_n) = \mathcal{B} := \mathcal{A} \cdot T$ eine *ON*-Basis; T ist die Basiswechsellmatrix $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Daher ist

$$M(\mathcal{B}, f, \mathcal{B}) = M(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, f, \mathcal{A}) \cdot M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

von der Gestalt wie in a). Also ist

$$\begin{aligned} \text{Eig}(f, 1) &= \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R} \cdot b_i, \\ \text{Eig}(f, -1) &= \bigoplus_{i=k+1}^{k+l} \mathbb{R} \cdot b_i, \end{aligned}$$

und f ist auf jedem der zweidimensionalen Räume $\mathbb{R} \cdot b_{k+l+1} \oplus \mathbb{R} \cdot b_{k+l+2}, \dots, \mathbb{R} \cdot b_{n-1} \oplus \mathbb{R} \cdot b_n$ eine Drehung. \square

Definition/Lemma 14.8 a) (Definition)

$$\begin{aligned} O(n) &:= \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{tr} = A^{-1}\}, \\ SO(n) &:= \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}, \\ U(n) &:= \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\} \\ &= \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^{tr} = A^{-1}\}, \\ SU(n) &:= \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}. \end{aligned}$$

b) (Lemma) Die vier Mengen in a) sind mit der Matrizenmultiplikation Gruppen. Man hat die Untergruppenbeziehungen

$$\begin{array}{ccccc} SO(n) & \subset & O(n) & \subset & GL(n, \mathbb{R}) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ SU(n) & \subset & U(n) & \subset & GL(n, \mathbb{C}). \end{array}$$

c) (Definition) $O(n)$ ist die orthogonale Gruppe, $SO(n)$ ist die spezielle orthogonale Gruppe, $U(n)$ ist die unitäre Gruppe und $SU(n)$ ist die spezielle unitäre Gruppe.

Beweis: a) und c) Definitionen.

b) Nachrechnen: leicht. □

Beispiele 14.9 i) $n = 1, K = \mathbb{R}$: $SO(1) = \{E_1\} = \{(1)\}$,
 $O(1) = \{(1), (-1)\}$.

ii) $n = 1, K = \mathbb{C}$: $SU(1) = \{E_1\} = \{(1)\}$,
 $U(1) = \{(z) \mid z \in S^1\} \cong$ (als Gruppe) S^1 .

iii) $n = 2, K = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} SO(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \\ &\cong \text{(als Gruppe)} \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in [0, 2\pi)\} = S^1. \\ O(2) &= SO(2) \cup SO(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \\ &\approx \text{(als Menge)} S^1 \cup S^1. \end{aligned}$$

Bei $O(2)$ parametrisiert die eine S^1 die Drehungswinkel der Drehungen; die andere S^1 parametrisiert die Spiegelungsachsen der Spiegelungen. Als Gruppe ist $O(2)$ *nicht* isomorph zu $S^1 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; vielmehr ist sie ein *semidirektes Produkt* (Definition nicht hier) der Gruppen S^1 und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht, sondern bei

$$\begin{aligned} d_\alpha &:= \text{Drehung um den Winkel } \alpha, \\ s_v &:= \text{Spiegelung an der Geraden durch } v \in V - \{0\} \end{aligned}$$

gilt (Beweis: SKIZZE IN DER VORLESUNG)

$$d_\alpha \circ s_v \circ d_\alpha^{-1} = s_{d_\alpha(v)}.$$

iv)

$$\begin{aligned} SU(2) &= \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär und } \det A = 1\} \\ &= \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \overline{A}^{tr} = A^{-1}, \det A = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1, \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\} \\ &\approx \text{(als Menge)} \{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1\} \\ &= S^3 \quad \quad \quad (3\text{-Sphäre im } \mathbb{R}^4). \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
SO(3) &= \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal und } \det A = 1\} \\
&= \{A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid A^{tr} = A^{-1}, \det A = 1\} \\
&\cong \text{(als Gruppe) } \{\text{id}\} \cup \{\text{Drehung an einer orientierten Achse} \\
&\quad \mathbb{R} \cdot v \text{ mit } v \in S^2 \text{ um einen Winkel } \alpha \in (0, \pi)\}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
&SO(3) - \{\text{Drehungen an einer Achse } \mathbb{R} \cdot v \text{ um den Winkel } \pi\} \\
&\approx \text{(als Menge) } \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| < 1\} =: D^3 \quad (\text{3-Ball im } \mathbb{R}^3).
\end{aligned}$$

Hier entspricht $0 \in D^3$ der Identität und $v \in D^3 - \{0\}$ der Drehung an $\mathbb{R} \cdot v$ um den Winkel $\pi \cdot \|v\|$.

SKIZZE IN DER VORLESUNG

Die Drehungen um den Winkel π werden *nicht* durch S^2 parametrisiert, denn entgegengesetzte Punkte auf der S^2 geben dieselbe Drehung, da die Drehwinkel π und $-\pi$ modulo 2π gleich sind. Also erhält man $SO(3)$ aus $D^3 \cup S^2$, indem man entgegengesetzte Punkte von S^2 identifiziert, also $D^3 \cup S^2$ so entlang seines Randes S^2 mit sich selbst verklebt. Das gibt ein dreidimensionales Objekt, das nicht mehr als Teilmenge im \mathbb{R}^3 veranschaulicht werden kann. Aber es sieht lokal aus wie der \mathbb{R}^3 . Es ist eine *orientierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand* (Definition nicht hier); genauer: es ist der reelle dreidimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^3\mathbb{R}$ (Definition nicht hier).

Bemerkungen 14.10 Zur Geometrie von $SO(3)$ gibt es ein schönes Experiment. Für eine saubere Diskussion braucht man Begriffe der *Topologie*, siehe unten 14.11. Aber man kann das Experiment auch ohne diese Begriffe ganz gut verstehen, und es lohnt sich.

Das Experiment: Man legt ein Buch auf einen (etwa den rechten) Handteller und dreht es immer weiter in einer Richtung in der horizontalen Ebene. Dabei hält man den Oberkörper gerade, nimmt aber eine Zeitlang Verdrillungen des Armes und der Hand in Kauf und führt das Buch sogar unter der Armbeuge durch.

SKIZZE UND VORFÜHRUNG IN DER VORLESUNG

Nachdem das Buch um insgesamt 4π gedreht worden ist, ist der Arm wieder entspannt in der Ausgangslage.

Warum bei 4π ? Warum überhaupt? Warum nicht schon bei 2π ?

Um das zu verstehen, wird das Experiment in Mathematik übersetzt.

Übersetzen des Experimentes in Formeln: Man hat einen Zeitparameter $t \in [0, 1] =: I$ (I steht für Intervall) und einen Parameter $x \in I$ für die Punkte auf einer gewählten Kurve, die vom Buchmittelpunkt durch den Arm bis zum Körpermittelpunkt läuft.

Dann hat man erst einmal eine stetige Positionsfunktion

$$P : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, t) \mapsto P(x, t),$$

die zu jedem Zeitpunkt die Lage im \mathbb{R}^3 des Punktes x der Kurve im Körper zum Zeitpunkt t angibt. Man hat aber auch eine stetige Verdrillungsfunktion

$$G : I \times I \rightarrow SO(3), (x, t) \mapsto G(x, t),$$

die zu jedem Zeitpunkt angibt, wie sehr der Arm am Punkt x zum Zeitpunkt t gegenüber seiner Ausgangslage zum Zeitpunkt 0 verdreht worden ist.

Tatsächlich ist die Funktion P irrelevant. Wir vergessen sie ab jetzt. Die Funktion G ist dagegen entscheidend. Sie muß folgende Zusatzbedingungen erfüllen:

$G(1, t) = E_3$: der Körpermittelpunkt wird nicht verdreht;

$$G(0, t) \in \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} =: S_{hor}^1 \quad :$$

das Buch wird nur horizontal gedreht;

$G(x, 0) = E_3$: zum Referenzzeitpunkt $t = 0$ ist natürlich nichts verdreht;

$G(x, 1) = E_3$: zum Zeitpunkt $t = 1$ ist der Arm wieder in Ausgangslage.

Die geschlossene Kurve $S_{hor}^1 \subset SO(3)$ ist natürlich eine Untergruppe der $SO(3)$, und das Bild einer injektiven und stetigen Abbildung $S^1 \rightarrow SO(3)$.

Formalisierung der Fragen oben (warum 4π ? etc): Nun kann man ansetzen, daß man eine stetige Funktion $g : I \rightarrow S_{hor}^1$ mit $g(1) = g(0) = E_3$ gegeben habe. Sie beschreibt einen Kandidaten für eine Familie (in einem Zeit-Parameter) von Verdrehungen des Buches auf dem Handteller.

Zu so einer Funktion gibt es eine eindeutige stetige Funktion

$$\alpha[g] : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad g(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha[g](t) & -\sin \alpha[g](t) & 0 \\ \sin \alpha[g](t) & \cos \alpha[g](t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die *Gesamtverdrehung* zu g definiert als $\alpha[g](1)$, und das ist ein Vielfaches von 2π . Der folgende Satz beantwortet die Fragen und erklärt das Experiment.

Satz: Zu einem g wie oben gibt es genau dann ein G wie oben mit $g = G(0, \cdot)$, wenn die Gesamtverdrehung $\alpha[g](1)$ von g ein Vielfaches von 4π ist.

Beweisidee zu \Leftarrow : Es reicht, die spezielle (aber typische) Abbildung g mit $\alpha[g](t) = 4\pi \cdot t$ zu betrachten. Man muß eine Familie $G(x, \cdot)$ von Wegen

in $SO(3)$ finden, die den Weg $g = G(0, \cdot)$ stetig in den "trivialen" Weg $G(1, \cdot) : I \rightarrow \{E_3\}$ deformiert. Daß das geht, zeigt eine

SKIZZE IN DER VORLESUNG.

Zu \Rightarrow : Man muß einsehen, daß es im Fall der Abbildung g mit $\alpha[g](t) = 2\pi \cdot t$ keine solche Familie von Wegen gibt. Das ist nach der Skizze zwar schon ein bisschen anschaulich. Aber bewiesen werden soll es hier nicht.

Bemerkungen 14.11 Begriffe, die hinter dem Experiment in 14.10 stehen:

(i) Für jede Teilmenge Y des \mathbb{R}^N (und allgemeiner für jeden *topologischen Raum* Y) und jeden Punkt $y \in Y$ kann man eine *Fundamentalgruppe* $\pi_1(Y, y)$ folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} \Omega(Y, y) &:= \{g : I \rightarrow Y \mid g \text{ stetig, } g(0) = g(1) = y\} \\ &= \text{die Menge der geschlossenen Wege in } Y \\ &\quad \text{mit Anfangs- und Endpunkt } y, \end{aligned}$$

eine Äquivalenzrelation \sim auf $\Omega(Y, y)$:

$f \sim g \iff \text{Def } \exists G : I \times I \rightarrow Y \text{ stetig, so daß gilt:}$

$$G(0, t) = f(t), \quad G(1, t) = g(t), \quad G(x, 0) = G(x, 1) = y.$$

$$\pi_1(Y, y) := \Omega(Y, y) / \sim.$$

Auf $\Omega(Y, y)$ ist folgende Verknüpfung definiert: Bei $f, g \in \Omega(Y, y)$ ist $f \circ g \in \Omega(Y, y)$ die Abbildung mit

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} f(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Lemma: $[f_1] = [f_2], [g_1] = [g_2] \Rightarrow [f_1 \circ g_1] = [f_2 \circ g_2]$.

Daher hat man eine Gruppenstruktur auf $\pi_1(Y, y)$.

In diesem Rahmen kann man das Problem in 14.10 gut verstehen. Die Bewegung des gesamten Armes gibt eine Deformation der Bewegung des Buches zur trivialen Bewegung der Körpermitte. Ein geschlossener Weg in $SO(3)$ ist genau dann mit dem Handteller und dem Arm ausführbar, wenn seine Klasse in $\pi_1(SO(3), E_3)$ trivial ist. Eine Umformulierung und Präzisierung des Satzes oben ist der folgende Satz.

Satz: $\pi_1(SO(3), E_3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und $[g] \cong [\frac{\alpha[g](1)}{2\pi} \bmod 2\mathbb{Z}] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(ii) Der Beweis dieses Satzes benutzt eine natürliche 2-zu-1-Abbildung $S^3 \rightarrow SO(3)$, die man erhält, wenn man S^3 aus zwei Kopien von $\overline{D^3}$ zusammensetzt (etwas analoges geht auch in den Dimensionen 1 und 2). Diese Abbildung ist die *universelle Überlagerung* von $SO(3)$, und es ist $\pi_1(S^3, pt) \cong \{0\}$. Auch die Beschreibung $SU(2) \approx S^3$ in 14.9 iv) paßt ins Bild. Die induzierte Abbildung $SU(2) \rightarrow SO(3)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, und sie läßt sich präzise mit den *Hamilton-Quaternionen* beschreiben.

Bemerkungen 14.12 (i) Der folgende Satz gibt noch einen anderen Ausblick auf die Geometrie von zwei- und dreidimensionalen Objekten. Teil b) betrifft die Platonischen Körper.

(ii) In Blatt ?, Aufgabe ?, waren die Symmetriegruppen bestimmter n -Ecke in \mathbb{R}^2 eingeführt worden, die zyklische Gruppe $C_n^{(2)} \subset SO(2)$ der orientierungserhaltenden Symmetrien und die Diedergruppe $D_{2n}^{(2)} \subset O(2)$ aller Symmetrien. Man kann dieses spezielle n -Eck mit einem beliebigen Element $g \in O(2)$ in ein anderes n -Eck überführen. Dessen Symmetriegruppe ist dann die Gruppe $gD_{2n}^{(2)}g^{-1}$, also eine konjugierte Untergruppe. Die Konjugationsklasse von $D_{2n}^{(2)}$ besteht aus einer 1-Parameter-Familie von isomorphen Untergruppen, die alle *Diedergruppe* genannt werden. Die Gruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien bleibt allerdings gleich, $gC_n^{(2)}g^{-1} = C_n^{(2)}$, sie ist ein Normalteiler in $O(2)$.

(iii) In Blatt ?, Aufgabe ?, waren die Symmetriegruppen \mathcal{T} , \mathcal{O} und \mathcal{I} der Platonischen Körper eingeführt worden. Wieder hängt die genaue Gruppe allerdings von der Wahl der Lage eines Platonischen Körpers ab. Eine andere Wahl gibt eine konjugierte Untergruppe. Insgesamt hat man für die Wahl der Lage des Platonischen Körpers und damit auch für die Familien von konjugierten Untergruppen 3 Parameter. Wir werden im folgenden mit den Notationen \mathcal{T} , \mathcal{O} und \mathcal{I} unpräzise sein und mal die Konjugationsklassen, mal einzelne Repräsentanten meinen.

(iv) Aus Blatt ?, Aufgabe ? und Aufgabe ?, kann man eine weitere Familie von Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen von $SO(3)$ herausziehen, die Diedergruppen $D_{2n}^{(3)}$: Es sind die Gruppen der orientierungserhaltenden Symmetrien von n -Ecken im \mathbb{R}^3 . Wieder gibt ein festes n -Eck eine feste Gruppe, aber ein anderes n -Eck gibt eine konjugierte Gruppe. Wieder hat man für die Wahl der Lage des n -Ecks und damit auch der Gruppe 3 Parameter. Man hat natürlich auch jeweils die zyklischen Untergruppen $C_n^{(3)}$ der Drehungen der Ebene, in der sich das n -Eck befindet, um Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$. Das gibt eine Konjugationsklasse von Untergruppen mit nur 2 Parametern, denn sie hängt nur von der Wahl dieser Ebene ab, nicht von der zusätzlichen Wahl der Lage des n -Ecks in dieser Ebene.

Satz 14.13 a) Die einzigen endlichen Untergruppen der $SO(2)$ sind die zyklischen Gruppen $C_n^{(2)}$ ($n \geq 1$) und die Diedergruppen $D_{2n}^{(2)} := C_n^{(2)} \cup C_n^{(2)} \cdot \sigma$ ($n \geq 1$) mit $\sigma \in O(2) - SO(2)$ eine Spiegelung (eine 1-Parameter-Familie von konjugierten Untergruppen der $O(2)$).

b) Es gibt nur folgende Konjugationsklassen von endlichen Untergruppen der $SO(3)$: die zyklischen Gruppen $C_n^{(3)}$ ($n \geq 1$), die Diedergruppen $D_{2n}^{(3)}$ ($n \geq 1$), und die Symmetriegruppen \mathcal{T} , \mathcal{O} und \mathcal{I} der fünf Platonischen Körper.