Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Blatt 14
30.05.2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb
(Fortsetzung von LA IIa/DMA)

Auf diesem Blatt ist $\mathbb{R}^n = M(n \times 1, \mathbb{R})$.

Aufgabe 1: (4 Punkte)
$O(2)$ und $SO(2)$ seien die Gruppen aus Bemerkung 13.4 iii) des Skriptes, und es gilt:

$$\begin{aligned}
SO(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \overset{\text{(als Gruppe)}}{\cong} \{e^{i\alpha} \mid \alpha \in [0, 2\pi)\} = S^1. \\
O(2) &= SO(2) \cup SO(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \\
&\overset{\text{(als Menge)}}{\approx} S^1 \cup S^1.
\end{aligned}$$

Bei $O(2)$ parametrisiert die eine S^1 die Drehungswinkel der Drehungen des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung; die andere S^1 parametrisiert die Spiegelungsachsen der Spiegelungen. Als Gruppe ist $O(2)$ *nicht* isomorph zu $S^1 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; vielmehr ist sie ein *semidirektes Produkt* (Definition nicht hier) der Gruppen S^1 und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht, sondern bei

$$\begin{aligned}
d_\alpha &:= \text{Drehung um den Winkel } \alpha, \\
s_v &:= \text{Spiegelung an der Geraden durch } v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

gilt die Beziehung:

$$d_\alpha \circ s_v \circ d_\alpha^{-1} = s_{d_\alpha(v)}.$$

i.) Beweisen Sie diese Formel und machen Sie eine Skizze dazu.
ii.) Vervollständigen Sie (ohne Beweis) die folgende Tabelle zur Gruppenstruktur von $O(2)$. Der Winkel zwischen w und v soll γ genannt werden (also ist $-\gamma$ der Winkel zwischen v und w).

$\circ$	d_β	s_w
d_α	$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}$	$d_\alpha \circ s_w = s_{\ldots}$
s_v	$s_v \circ d_\beta = s_{\ldots}$	$s_v \circ s_w = d_{\ldots}$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
i.) Zeigen Sie: Ist $A \in O(2)$, so ist

$$B := \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0\ 0 & \det A \end{pmatrix} \in SO(3).$$

Beschreibt A eine Drehung um einen Winkel α, so beschreibt B eine Drehung an der Drehachse $\mathbb{R} \cdot e_3$ um den Winkel α. Beschreibt A eine Spiegelung an der Achse $c_1 e_1 + c_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ (mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$), so beschreibt B eine Drehung an der Drehachse $c_1 e_1 + c_2 e_2 \in \mathbb{R}^3$ um den Winkel π.

Bitte wenden!

ii.) Ist $G \subset O(2)$ eine Untergruppe, so ist

$$\widetilde{G} := \{\, B := \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & & 0 \\ 0\ 0 & & \det A \end{pmatrix} \mid A \in G \,\}$$

eine Untergruppe von $SO(3)$ und als Gruppe isomorph zu G.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei $\in \mathbb{N}$. Wenn man von *der zyklischen Gruppe* C_n spricht, meint man i.a. eine Isomorphiklasse von Gruppen. Ein Repräsentant dieser Isomorphieklasse ist

$$C_n^{(1)} := \{\, e^{2\pi i k/n} \mid k \in \{0, ..., n-1\} \,\}.$$

Ein anderer ist

$$C_n^{(2)} := \{ \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi k}{n} & -\sin \frac{2\pi k}{n} \\ \sin \frac{2\pi k}{n} & \cos \frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \mid k \in \{0, ..., n-1\}\}.$$

Offensichtlich beschreibt $C_n^{(2)}$ die Gruppe der Drehungen der reellen Ebene um Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$. Das ist genau die Gruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien des gleichseitigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt 0 und den Ecken $(\cos \frac{2\pi k}{n},\ -\sin \frac{2\pi k}{n})^{tr}$.
Es sei $D_{2n}^{(2)} \subset O(2)$ die Gruppe aller Symmetrien dieses gleichseitigen n-Ecks. Die *Diedergruppe* D_{2n} bezeichnet ihre Isomorphieklasse.

i.) Machen Sie in den Fällen $n = 3, 4, 5$ je eine Skizze des gleichseitigen n-Ecks und der Spiegelungsachsen der Spiegelungen in $D_{2n}^{(2)}$.

ii.) Listen Sie die Elemente von $D_{2n}^{(2)}$ auf, und zeigen Sie

$$C_n^{(2)} \subset D_{2n}^{(2)}, \quad |D_{2n}^{(2)}| = 2n, \quad D_{2n}^{(2)} - C_n^{(2)} = \{\text{Spiegelungen in } D_{2n}^{(2)}\}.$$

Bemerkung: Wegen Aufgabe 2 kann man die Diedergruppe D_{2n} auch durch die Gruppe der orientierungserhaltenden Symmetrien des $\mathbb{R}^3$, die ein gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 \subset \mathbb{R}^3$ auf sich abbilden, repräsentieren.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

i.) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\widetilde{SU(1,1)} := \left\{ B \in SL(2, \mathbb{C}) \mid B^{tr} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\} = SL(2, \mathbb{R}).$$

ii.) Ist die Menge

$$Sp(2, \mathbb{R}) := \left\{ B \in SL(2, \mathbb{R}) \mid B^{tr} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine echte Teilmenge von $SL(2, \mathbb{R})$ oder gleich $SL(2, \mathbb{R})$?

Hinweise: Bei (a) kann man verschieden geschickt rechnen. Wie lautet die Formel für die inverse Matrix einer (2×2)-Matrix? Wenn man (a) verstanden hat, ist (b) einfach.

Abgabe: 03.06.2011 im Hörsaal vor der Vorlesung.