Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Ralf Kurbel

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb (Fortsetzung von LA IIa/DMA)

Aufgabe 1: (2+1+2 Punkte)
Es sei folgende reelle symmetrische Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-\sqrt{3}}{5} \\ \frac{-\sqrt{3}}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Die Standardkoordinaten auf $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ werden mit x_1 und x_2 bezeichnet, also $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot x_1 + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x_2$. Der Matrix A ist folgende quadratische Form zugeordnet:

$$q_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad (x_1, x_2) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \cdot x_1^2 - \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot x_1 x_2 + \frac{4}{5} \cdot x_2^2.$$

i.) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und eine ON-Basis v_1, v_2 von Eigenvektoren. Achten Sie beim Vorzeichen von v_2 darauf, daß die orthogonale Matrix $T := (v_1\ v_2)$ die Determinante 1 hat.
Nun werden neue Koordinaten (y_1, y_2) definiert durch
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_2 = v_1 \cdot y_1 + v_2 \cdot y_2 = T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$
Hier werden $x_1 = x_1(y)$ und $x_2 = x_2(y)$ als Funktionen in y_1 und y_2 betrachtet.

ii.) Berechnen Sie $q_A(x_1(y), x_2(y))$.

iii.) Zeichnen im Koordinatensystem mit Koordinaten x_1 und x_2 die Vektoren v_1 und v_2 und das neue Koordinatensystem (y_1, y_2) ein. Zeichnen Sie auch eine Skizze der Ellipse $\{(x_1, x_2) \mid q_A(x_1, x_2) = 1\}$ ein.

Aufgabe 2: (2+2+2 Punkte)
Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

i.) Zeigen Sie, daß die Matrix B orthogonal ist und die Determinante 1 hat.

ii.) Nach Lemma 14.4 beschreibt sie daher eine Drehung. Wegen $B \neq E_3$ ist es eine „echte“ Drehung um einen Winkel $\alpha \neq 0$ und mit eindeutiger Drehachse $\mathbb{R} \cdot c_1$, wobei c_1 ein normierter Eigenvektor von B zum Eigenwert 1 ist.
Bestimmen Sie eine ON-Basis (c_1, c_2, c_3) von $M(3 \times 1, \mathbb{R})$, so daß c_1 ein Eigenvektor von B mit Eigenwert 1 ist und c_2 und c_3 die dazu orthogonale Ebene aufspannen.

iii.) Sei $T \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ die orthogonale Matrix mit Spalten c_1, c_2, c_3. Berechnen Sie $T^{tr} \cdot B \cdot T$ und geben Sie $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ des Drehwinkels α an.
Bemerkungen: Der Winkel hängt von der Orientierung der Ebene $(\mathbb{R} \cdot c_1)^\perp = \mathbb{R} \cdot c_2 + \mathbb{R} \cdot c_3$ ab, d.h. von der Wahl von c_2 und c_3. Der Winkel α selber ist nicht leicht angebbar, Sie sollen nur $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ angeben.

Aufgabe 3: (2+3 Punkte)
Diese Aufgabe greift der Vorlesung voraus, aber sie ist sehr anschaulich und kann ohne weiteres schon jetzt bearbeitet werden. Bitte akzeptieren Sie folgendes in dieser Aufgabe als bekannt:

A.) Die Menge $SO(3) := \{ A \in SL(3, \mathbb{R}) \mid A^{tr} = A^{-1} \}$ ist eine Gruppe. Ihre Elemente sind die orthogonalen 3×3-Matrizen mit Determinante $+1$. Nach Lemma 14.4 beschreiben diese Matrizen Drehungen des $M(3 \times 1, \mathbb{R})$. In dieser Aufgabe wird $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ mit dem $\mathbb{R}^3$ identifiziert.

Bitte wenden !!!

B.) Es gibt die fünf Platonischen Körper, die unten angegeben sind. Beim Tetraeder und beim Würfel ist es klar. Beim Oktaeder folgt es daraus, daß seine Ecken die Flächenmittelpunkte des Würfels sind. Aber beim Dodekaeder muß man eigentlich eine Konstruktion angeben, die zeigt, daß es tatsächlich eine Konfiguration von Punkten im $\mathbb{R}^3$ gibt, die insgesamt 12 gleichseitige Fünfecke aufspannen, die sich wiederum wie im Bild zusammensetzen. Danach erhält man die Ecken des Ikosaeders als Flächenmittelpunkte des Dodekaeders.

C.) Der Mittelpunkt eines Platonischen Körpers soll jeweils der Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$ sein. Durch eine solche Einbettung eines Platonischen Körpers in den $\mathbb{R}^3$ wird die Menge der Drehungen des $\mathbb{R}^3$, die den Platonischen Körper auf sich abbilden, eine endliche Untergruppe von $SO(3)$.

Die folgende Tabelle gibt Informationen über die (endliche) Gruppe $\mathcal{O}$ der „orientierungserhaltenden Symmetrien" des Würfels, d.h. der Elemente von $SO(3)$, die einen Würfel im $\mathbb{R}^3$ mit Mittelpunkt in 0 auf sich abbilden.

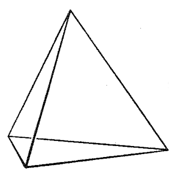
$$X := \text{ Anzahl der Drehachsen eines Typs,}$$
$$Y := \text{ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,}$$

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{1}{2}\pi,\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	6
4	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

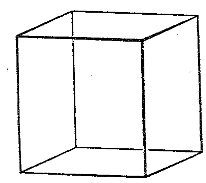
$\Rightarrow |\mathcal{O}| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$

i.) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{T}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Tetraeders und bestimmen Sie $|\mathcal{T}|$.

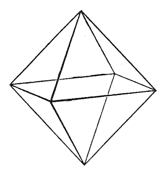
ii.) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe $\mathcal{I}$ der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Dodekaeders und bestimmen Sie $|\mathcal{I}|$.



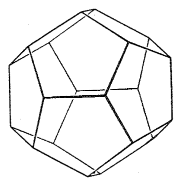
Tetraeder



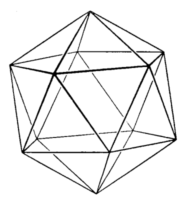
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

Abgabe: 30.05.2011 im Hörsaal vor der Vorlesung.