Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb (Fortsetzung von LA IIa/DMA)

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Es sei folgende reelle Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & d & h \\ \frac{2}{3} & a & e & 0 \\ \frac{2}{3} & b & f & i \\ 0 & c & g & 0 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ so, daß A eine orthogonale Matrix ist und $c, d, i > 0$ gelten.

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Es sei folgende reelle symmetrische Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{R}).$$

i.) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und alle drei (verschiedenen reellen) Eigenwerte (einer davon ist eine Primzahl kleiner 10).
ii.) Wählen Sie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor, und zeigen Sie, daß die drei gewählten Eigenvektoren alle paarweise zueinander orthogonal sind bzgl. des Standardskalarproduktes.

Aufgabe 3: (2+2 Punkte) Es seien die folgenden beiden reellen symmetrischen Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}$$

i.) Zeichnen Sie für die Bilinearform $\phi := \mathrm{Bil}_A$ folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$M_{\phi,0} := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x,x) = 0 \} \qquad M_{\phi,1} := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x,x) = 1 \}$$
$$M_{\phi,-} := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x,x) < 0 \} \qquad M_{\phi,+} := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \phi(x,x) > 0 \}$$

Bitte wenden!

ii.) Bestimmen Sie für die Matrix B die Eigenwerte. Konstruieren Sie eine orthogonale Matrix S aus Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten (Spalten von S gleich normierte Eigenvektoren), so daß gilt:

$$S^{tr}BS = S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

wobei die λ_i die Eigenwerte von B sind. Überprüfen Sie für Ihre Wahl von Eigenvektoren die Gleichungen

$$S^{tr} = S^{-1} \quad \text{und} \quad S^{-1}BS = \text{Diagonalmatrix.}$$

Aufgabe 4: (4 Punkte) (Beweis von 13.4.v) des Vorlesungsskriptes)
Beweisen Sie, daß folgende Abbildung eine Bijektion ist:

$$\{\, (\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mid \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \zeta_i \in S^1, \begin{array}{c} \zeta_2 = 1 \text{ für } \alpha = 0, \\ \zeta_1 = 1 \text{ für } \alpha = \frac{\pi}{2} \end{array} \} \longrightarrow \{\text{unitäre } (2 \times 2)\text{-Matrizen}\}$$

$$(\alpha, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \mapsto \begin{pmatrix} \zeta_1 \cos\alpha & -\zeta_3 \sin\alpha \\ \zeta_2 \sin\alpha & \zeta_2\zeta_3\overline{\zeta}_1 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wenn man die Spaltenvektoren einer unitären (2×2)-Matrix a_1 und a_2 nennt, kann man zuerst die Absolutwerte der Einträge von a_1 behandeln (es ist $\|a_1\| = 1$), und dann die von a_2 (es ist $\|a_2\| = 1$ und $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$). Danach können dann die komplexen Phasen der Einträge diskutiert werden.

Abgabe: 23.05.2011 im Hörsaal vor der Vorlesung.