Übungsaufgaben zur Linearen Algebra IIb (Fortsetzung von LA IIa/DMA)

Aufgabe 1: (4 Punkte)

i.) (2P) Die hermitesche Sesquilinearform ϕ sei definiert durch:

$$\phi := \mathrm{Sesq}_A \quad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für ϕ das Radikal und die Menge aller isotropen Elemente.

ii.) (2P) Überprüfen Sie für folgende hermitesche Matrix mit dem Hauptminorenkriterium, ob sie positiv definit ist:

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1+i & 1-i \\ 1-i & 1 & 1+i \\ 1+i & 1-i & 13 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die folgenden drei Aufgaben bauen alle aufeinander auf. Sie können bei Ihren Argumenten Aussagen aus den vorherigen Aufgaben benutzen, ohne sie bewiesen zu haben.

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Sei (V, ϕ) ein unitärer Vektorraum, und seien $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie:

$$\phi\big(v, f(w)\big) = \phi\big(v, g(w)\big) \text{ für alle } v, w \in V \quad \Longrightarrow \quad f = g.$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)
Sei (V, ϕ) ein endlichdimemsionaler unitärer Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Mit f^* sei die adjungierte Abbildung aus Definition 13.1a.) bezeichnet. Sie ist die eindeutig bestimmte (und existierende) Abbildung zu f, so daß für alle $v, w \in V$ folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\phi\big(f^*(v), w\big) = \phi\big(v, f(w)\big) \quad \text{und} \quad \phi\big(f(v), w\big) = \phi\big(v, f^*(w)\big).$$

Damit ist folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\Psi\colon \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \quad \text{mit} \quad \Psi(f) := f^*.$$

Bitte wenden!

i.) (1P) Zeigen Sie, daß für $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\Psi(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha} f^* + \overline{\beta} g^*.$$

ii.) (1P) Zeigen Sie, daß gilt:

$$\Psi(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V \quad \text{und} \quad \Psi^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)}.$$

Bemerkung: Damit ist Ψ insbesondere bijektiv.

iii.) (2P) Zeigen Sie, daß für $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gilt:

$$\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^{\perp} \quad \text{und} \quad \ker(f) = \mathrm{im}(f^*)^{\perp}.$$

iv.) (2P) Zeigen Sie, daß für $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ gilt:

$$f \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V) \quad \Longleftrightarrow \quad f^* \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V).$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Sei (V, ψ) ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Der Endomorphismus f von V heißt normal, wenn er und seine adjungierte Abbildung kommutieren, d.h. wenn gilt:

$$f \circ f^* = f^* \circ f.$$

i.) (2P) Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$f \text{ ist normal} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi\big(f(v), f(w)\big) = \phi\big(f^*(v), f^*(w)\big) \text{ für alle } v, w \in V.$$

ii.) (1P) Zeigen Sie für f normal: $\ker(f) = \ker(f^*)$.

iii.) (1P) Zeigen Sie für f normal und $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Eig}(f^*, \overline{\lambda}).$$

Abgabe: 16.05.2011 im Hörsaal vor der Vorlesung.